

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

BIANCA LUHM CRIVELLARO

UM ESTUDO DO FENÔMENO DE HURST EM TURBULÊNCIA ATMOSFÉRICA

CURITIBA

2018

BIANCA LUHM CRIVELLARO

UM ESTUDO DO FENÔMENO DE HURST EM TURBULÊNCIA ATMOSFÉRICA

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Nelson Luís da Costa Dias

CURITIBA

2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

C936e

Crivellaro, Bianca Luhm

Um estudo do fenômeno de Hurst em turbulência atmosférica / Bianca Luhm Crivellaro. – Curitiba, 2018.

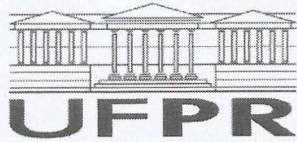
Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2018.

Orientador: Nelson Luís da Costa Dias.

1. Memória de longo prazo. 2. Teoria dos erros. 3. Turbulência. I. Universidade Federal do Paraná. II. Dias, Nelson Luís da Costa. III. Título.

CDD: 551.51

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS  
EM ENGENHARIA

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **BIANCA LUHM CRIVELLARO** intitulada: **UM ESTUDO DO FENÔMENO DE HURST EM TURBULÊNCIA ATMOSFÉRICA**, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 14 de Novembro de 2018.

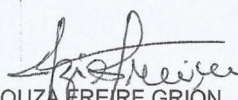
NLDias

NELSON LUÍS DA COSTA DIAS  
Presidente da Banca Examinadora

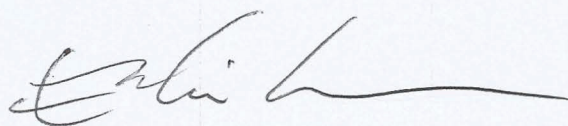
DEFESA A DISTÂNCIA

MARCELO CHAMECKI NLDias  
Avaliador Externo

  
DORNELLES VISSOTTO JUNIOR  
Avaliador Externo

  
LÍVIA SOUZA FREIRE GRION  
Avaliador Externo

  
MAURÍCIO FELGA GOBBI  
Avaliador Interno

  
EMÍLIO GRACILIANO FERREIRA MERCURI  
Avaliador Interno

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a DEUS por sempre estar ao meu lado, me guiando e me ajudando a desenvolver este trabalho.

Gostaria de agradecer meu orientador, Prof. Nelson Luís da Costa Dias, por sempre acreditar em mim, me incentivar e me ajudar durante toda minha jornada na Universidade Federal do Paraná, desde a graduação até o doutorado.

Agradeço ao Prof. Marcelo Chamecki por colaborar com o desenvolvimento deste trabalho, disponibilizar séries de dados, e por ter aceitado fazer parte de minha banca de defesa.

Agradeço ao Prof. Maurício Gobbi, ao Prof. Emílio Graciliano Ferreira Mercuri, ao Prof. Dornelles Vissotto e a Livia Souza Freire Grion por terem se disponibilizado e aceitado a participar da banca de minha defesa.

Agradeço ao Laboratório de Estudos em Monitoramento e Modelagem Ambiental (Lemma), ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) e a todos os colaboradores por todo apoio durante os 4 anos do meu doutorado.

Agradeço ao Fernando Augusto Silveira Armani por toda ajuda e companheirismo durante nossa difícil jornada no doutorado.

Agradeço a CAPES pela bolsa de pesquisa durante todo o período de meu doutorado.

Agradeço toda minha família, em especial meus pais, Susane Luhm Crivellaro e Carlos Alberto Crivellaro, e meus irmãos, Carolina Luhm Crivellaro e Gustavo Luhm Crivellaro por sempre acreditarem e confiarem em mim. Sem vocês me apoiando essa jornada teria sido muito mais difícil. Obrigada por sempre me ajudarem quando eu precisava.

Finalmente, agradeço meu companheiro e marido, Anderson Wunsche, por sempre estar ao meu lado nos momentos difíceis, por me apoiar e me incentivar, sempre me mostrando que eu era capaz de conseguir vencer cada batalha que enfrentei durante o período de meu doutorado.

*“Um dia, quando olhares para trás, verás que os dias mais belos foram aqueles em que lutaste.”*

Sigmund Freud

## RESUMO

O fenômeno de Hurst foi primeiramente detectado por E. Hurst em 1951 em análises realizadas com dados hidrológicos e geofísicos, e sugere que as séries possuem memória de longo prazo. Estudos encontrados na literatura mostram que o fenômeno de Hurst também já foi detectado em turbulência. O objetivo deste trabalho é analisar o fenômeno de Hurst em séries turbulentas de velocidade do vento e temperatura medidas em quatro campanhas micrometeorológicas, e avaliar quais os impactos deste fenômeno na estimativa de erros aleatórios. Após testes com séries sintéticas e com as séries micrometeorológicas foi definido que seriam utilizados somente dois métodos para estimar o expoente de Hurst ( $H$ ), parâmetro que determina a intensidade do fenômeno: (i) uma adaptação do Método de Filtragem, a qual foi proposta neste trabalho ( $H_p$ ) e (ii) o método clássico proposto por Hurst ( $H_R$ ). Utilizando dados das campanhas de Tijucas do Sul, Missal e AHATS foi verificado que as flutuações turbulentas de primeira, segunda e terceira ordem apresentam  $H > 1/2$ . Estes valores de  $H$  sugerem que as séries exibem o fenômeno de Hurst e implicam na não-existência da escala integral. Também verificou-se que estes dois estimadores são diferentes e que, para a maioria dos casos,  $H_R$  é maior que  $H_p$ . Análises realizadas mostram que a remoção da tendência linear afeta em muito pouco o expoente de Hurst. Para os erros relativos, foi verificado que a abordagem proposta neste trabalho, a qual leva em consideração o fenômeno de Hurst, gera erros maiores que o Método de Filtragem e o método clássico proposto por Lumley-Panofsky. Este resultado chama a atenção para estes métodos que, por não considerarem o fenômeno de Hurst e considerarem que a escala integral é finita, estão subestimando os erros. Análises mostram que o expoente de Hurst não possui nenhuma relação com a variável de estabilidade  $\zeta$ . Para as estimativas de erros foi verificado dependência somente para: o fluxo de momento cinemático em condições instáveis e para o fluxo de calor sensível em condições estáveis. Por fim, analisamos séries de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  contendo 7 horas e 30 minutos de dados provenientes da quarta campanha. Estas séries foram medidas em Mahomet, Illinois, Estados Unidos, e apresentam um comportamento praticamente estacionário. Foi verificado que, mesmo essas séries sendo longas o bastante, as variáveis  $u$  e  $v$  exibem o fenômeno de Hurst. No entanto,  $w$  possui  $H_p \approx 1/2$ , ou seja, a série de  $w$  não apresenta memória de longo prazo.

Palavras-chave: Fenômeno de Hurst. Memória de longo prazo. Erros aleatórios.

## ABSTRACT

The Hurst phenomenon was first observed by E. Hurst in 1951 in analyses performed with hydrological and geophysical data, and suggests that the data series have long-term memory. Works found in the literature show that the Hurst phenomenon has also been detected in turbulence. The goal of this work is to analyze the Hurst phenomenon in turbulent series of wind velocity and temperature measured in four micrometeorological campaigns, and to evaluate the impacts of this phenomenon in the estimation of random errors. After tests with synthetic series and micrometeorological series it was defined that only two methods were used to estimate the Hurst exponent ( $H$ ), parameter that determines the intensity of the Hurst phenomenon: (i) an adaptation of the Filtering Method, which was proposed in this work ( $H_p$ ) and (ii) the classic method proposed by Hurst ( $H_R$ ). Using data from Tijucas do Sul, Missal and AHATS campaigns it was found that turbulent fluctuations of first, second and third orders have  $H > 1/2$ . These values of  $H$  suggest that the data series exhibits the Hurst phenomenon and imply the non-existence of the integral scale. It has also been found that these two estimators are different and that, for most cases,  $H_R$  is larger than  $H_p$ . Analyses carried out show that the linear detrending changes minimally the Hurst exponent. For the relative errors, it was verified that the approach proposed in this work, which takes into account the Hurst phenomenon, estimates larger errors than the Filtering Method and the classic method proposed by Lumley-Panofsky. This result draws attention to these methods, which don't consider the Hurst phenomenon and consider that the integral scale is finite, are underestimating the errors. Analyses show that the Hurst exponent has no relation to the stability variable  $\zeta$ . For the estimates of errors, dependence with  $\zeta$  was verified only for: kinematic momentum flux under unstable conditions and for sensible heat flux under stable conditions. Finally, we analyzed series of  $u$ ,  $v$ ,  $w$  containing 7 hours and 30 minutes of data from the fourth campaign. These series were measured in Mahomet, Illinois, United States, and present a practically stationary behavior. It was found that even these series being long enough, the variables  $u$  and  $v$  exhibit the Hurst phenomenon. However,  $w$  has  $H_p \approx 1/2$ , that is, the  $w$  series has no long-term memory.

Key-words: Hurst phenomenon. Long-term memory. Random errors.



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Esquema gráfico de um processo estocástico. . . . .	21
4.1	Identificação da lei de potência de $\text{MSE}(\tilde{x}_\Delta) \sim (\mathcal{T}_H/\Delta) \ln(\Delta/\mathcal{T}_H)$ , resultado para o caso em que $q = 1$ . . . . .	42
5.1	Reta obtida para remoção da tendência linear em duas séries de dados (a) $u$ medido em Missal em 24/08/2013 entre 1720h e 1750h e (b) $\theta$ medido em Tijucas do Sul em 22/02/2011 entre 1050h e 1120h. . . . .	47
5.2	Exemplos da função de autocorrelação original (linha preta) e com a subtração de $\epsilon$ (linha cinza) para as flutuações turbulentas de primeira ordem medidas em Tijucas do Sul em 17/02/2011 entre 14:20h e 14:50h. . . . .	49
5.3	Gráficos adimensionais de $\text{MSE}(x)/\text{Var } x$ versus $\Delta/\mathcal{T}_H$ para todos os blocos, respectivamente, de Tijucas do Sul, Missal e AHATS: (a), (b) e (c) $u'$ , (d), (e) e (f) $w'u'$ , e (g), (h) e (i) $w'w'\theta'$ . . . . .	51
5.4	Gráficos de $\langle R/S \rangle$ versus $\Delta/\mathcal{T}_H$ para todos os blocos, respectivamente, de Tijucas do Sul, Missal e AHATS: (a), (b) e (c) $u'$ , (d), (e) e (f) $w'u'$ , e (g), (h) e (i) $w'w'\theta'$ . . . . .	52
5.5	Gráficos de $\langle R/S \rangle$ versus $\Delta$ para todos os blocos, respectivamente, de Tijucas do Sul, Missal e AHATS: (a), (b) e (c) $u'$ , (d), (e) e (f) $w'u'$ , e (g), (h) e (i) $w'w'\theta'$ . . . . .	53
5.6	Gráficos adimensionais de $\text{MSE}(x)/\text{Var } x$ versus $\Delta/\mathcal{T}_H$ para as 15 séries de 30 minutos de $u$ , $v$ e $w$ medidas em Mahomet. . . . .	54
5.7	Gráficos de $\langle R/S \rangle$ versus $\Delta$ para as 15 séries de 30 minutos de $u$ , $v$ e $w$ medidas em Mahomet. . . . .	55
5.8	Comportamento do MSE para a escolha do intervalo de ajuste para a série completa de $u$ , $v$ e $w$ medidos em Mahomet. . . . .	56
6.1	Métodos para a estimativa do expoente de Hurst: (a) função de autocorrelação; (b) função de estrutura; (c) espectro de <i>wavelet</i> ; (d) MFA; e (e) R/S, para séries sintéticas de smfGn (figura adaptada de Dias et al. (2018)). . . . .	60

6.2	Métodos para a estimativa do expoente de Hurst: (a) função de autocorrelação; (b) função de estrutura; (c) espectro de <i>wavelet</i> ; (d) MFA; e (e) R/S, para uma série de velocidade do vento $u'$ medida em AHATS em 17/07/2008 entre 08:30h e 09:00h (figura adaptada de Dias et al. (2018)). . . . .	62
6.3	Estimativa do expoente de Hurst para $u$ ((a) – MFA e (b) – R/S) e $u_{ld}$ ((c) – MFA e (d) – R/S) – série da dados de Missal medida em 24/08/2013 entre 17:20h e 17:50h. . . . .	64
6.4	Estimativa do expoente de Hurst para $\theta$ ((a) – MFA e (b) – R/S) e $\theta_{ld}$ ((c) – MFA e (d) – R/S) – série da dados de Tijucas do Sul medida em 22/02/2011 entre 10:50h e 11:20h. . . . .	65
6.5	Exemplos da estimativa de $H$ utilizando o MFA e o R/S para os dados de primeira ordem ( $u', v', w'$ e $\theta'$ ) de Tijucas do Sul medidos em 18/02/2011 entre 15:50h e 16:20h. . . . .	68
6.6	Exemplos da estimativa de utilizando o MFA ( $H_p$ ) e por R/S ( $H_R$ ) para os dados de segunda ordem – covariâncias ( $w'u'$ e $w'\theta'$ ) de Tijucas do Sul medidos em 18/02/2011 entre 15:50h e 16:20h. . . . .	69
6.7	Exemplos da estimativa de $H$ utilizando o MFA e o R/S para os dados de segunda ordem – variâncias ( $u'u', v'v', w'w'$ e $\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul medidos em 18/02/2011 entre 15:50 e 16:20h. . . . .	70
6.8	Exemplos da estimativa de $H$ utilizando o MFA e o R/S para os dados de terceira ordem ( $w'w'\theta', w'\theta'\theta', w'w'w'$ e $\theta'\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul medidos em 18/02/2011 entre 15:50 e 16:20h. . . . .	71
6.9	Comparação do expoente de Hurst estimado por MFA ( $H_p$ ) e por R/S ( $H_R$ ) para as flutuações de primeira ordem ( $u', v', w'$ e $\theta'$ ): (a) Tijucas do Sul, (b) Missal e (c) AHATS. . . . .	72
6.10	Comparação do expoente de Hurst estimado por MFA ( $H_p$ ) e por R/S ( $H_R$ ) para as flutuações de segunda ordem de Tijucas do Sul, Missal, e AHATS respectivamente, (a), (b) e (c) covariâncias – $w'u'$ e $w'\theta'$ , e (d), (e) e (f) variâncias – $u'u', v'v', w'w'$ e $\theta'\theta'$ . . . . .	73
6.11	Comparação do expoente de Hurst $H$ estimado por MFA ( $H_p$ ) e por R/S ( $H_R$ ) para as flutuações de terceira ordem de Tijucas do Sul, Missal e AHATS, respectivamente, (a), (b), (c) momentos de terceira ordem diferentes – $w'w'\theta'$ e $w'\theta'\theta'$ , e (d), (e), e (f) momentos de terceira ordem uniformes – $u'u'u', v'v'v', w'w'w'$ e $\theta'\theta'\theta'$ . . . . .	74
6.12	Análise do expoente de Hurst para diferentes ordens de uma mesma flutuação: (a), (d), (g), (j) Tijucas do Sul, (b), (e), (h), (k) Missal e (c), (f), (i), (l) AHATS. . . . .	75

6.13	Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao $\text{RMSE}(\widetilde{x}_\Delta)$ para primeira ordem ( $u'$ e $\theta'$ ) de Tijucas do Sul. . . . .	77
6.14	Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao $\text{RMSE}(\widetilde{x}_\Delta)$ para segunda ordem – covariâncias ( $w'u'$ e $w'\theta'$ ) de Tijucas do Sul. . . . .	78
6.15	Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao $\text{RMSE}(\widetilde{x}_\Delta)$ para segunda ordem – variâncias ( $u'u'$ , $v'v'$ , $w'w'$ e $\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul. . . . .	79
6.16	Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao $\text{RMSE}(\widetilde{x}_\Delta)$ para momentos de terceira ordem diferentes ( $w'u'u'$ , $w'v'v'$ e $w'\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul. . . . .	80
6.17	Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao $\text{RMSE}(\widetilde{x}_\Delta)$ para momentos de terceira ordem diferentes ( $w'w'u'$ , $w'w'\theta'$ e $w'e'$ ) de Tijucas do Sul. . . . .	81
6.18	Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao $\text{RMSE}(\widetilde{x}_\Delta)$ para momentos de terceira ordem iguais ( $u'u'u'$ , $v'v'v'$ , $w'w'w'$ e $\theta'\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul. . . . .	82
6.19	Comparação dos três métodos para estimativa do erro normalizado pelo desvio-padrão referente ao $\text{RMSE}(\widetilde{x}_\Delta)$ para momentos de terceira ordem diferentes ( $w'u'u'$ , $w'v'v'$ e $w'\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul. . . . .	83
6.20	Comparação dos três métodos para estimativa do erro normalizado pelo desvio-padrão referente ao $\text{RMSE}(\widetilde{x}_\Delta)$ para momentos de terceira ordem diferentes ( $w'w'u'$ , $w'w'\theta'$ e $w'e'$ ) de Tijucas do Sul. . . . .	84
6.21	Comparação dos três métodos para estimativa do erro normalizado pelo desvio-padrão referente ao $\text{RMSE}(\widetilde{x}_\Delta)$ para momentos de terceira ordem iguais ( $u'u'u'$ , $v'v'v'$ , $w'w'w'$ e $\theta'\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul. . . . .	85
6.22	Razão entre as estimativas de erro MFA/MF versus o expoente de Hurst $H_p$ para as flutuações de primeira ordem: (a) Tijucas do Sul; (b) Missal; e (c) AHATS. . . . .	87
6.23	Razão entre as estimativas de erro MFA/MF versus o expoente de Hurst $H_p$ para as flutuações de segunda ordem: (a) e (d) Tijucas do Sul; (b) e (e) Missal; e (c) e (f) AHATS. . . . .	89
6.24	Razão entre as estimativas de erro MFA/MF versus o expoente de Hurst $H_p$ para as flutuações de terceira ordem: (a) e (d) Tijucas do Sul; (b) e (e) Missal; e (c) e (f) AHATS. . . . .	89
6.25	Comparação entre $\zeta$ e o expoente de Hurst obtido pela estimativa MFA ( $H_p$ ) e pelo intervalo ajustado R/S ( $H_R$ ) para as flutuações turbulentas de primeira ordem da campanha de Missal. . . . .	91

6.26	Comparação entre $\zeta$ e o expoente de Hurst obtido pela estimativa MFA ( $H_p$ ) e pelo intervalo ajustado R/S ( $H_R$ ) para as flutuações turbulentas de segunda ordem da campanha de Missal. . . . .	91
6.27	Comparação entre $\zeta$ e o expoente de Hurst obtido pela estimativa MFA ( $H_p$ ) e pelo intervalo ajustado R/S ( $H_R$ ) para as flutuações turbulentas de terceira ordem da campanha de Missal. . . . .	92
6.28	Erros relativos obtidos pelas estimativas MFA e MF promediados em blocos da variável de estabilidade de Monin-Obukhov para (a) e (b) Tijucas do Sul, (c) e (d) Missal e (e) e (f) AHATS. . . . .	94
6.29	Erros relativos obtidos pelas estimativas MFA e MF promediados em blocos da variável de estabilidade de Monin-Obukhov para (a) e (b) Tijucas do Sul, (c) e (d) Missal e (e) e (f) AHATS. . . . .	95
6.30	Erros normalizados pelo desvio-padrão obtidos pelas estimativas MFA e MF promediados em blocos da variável de estabilidade de Monin-Obukhov para (a) e (b) Tijucas do Sul, (c) e (d) Missal e (e) e (f) AHATS. . . . .	96
6.31	Comparação do expoente de Hurst estimado por MFA ( $H_p$ ) e por R/S ( $H_R$ ) para $u$ , $v$ e $w$ de Mahomet. . . . .	97
6.32	Estimativa do expoente de Hurst $H_p$ e do erro aleatório para as séries completas de $u$ , $v$ e $w$ medidas em Mahomet. . . . .	98
6.33	Análise dos decaimentos do MSE e dos erros estimados pelo MSE para as séries $u$ , $v$ e $w$ medidas em Mahomet. A linha vermelha corresponde ao comportamento do MSE da série completa, juntamente com os ajustes – linhas tracejadas. As linhas pretas representam o comportamento do MSE para as 15 séries de 30 minutos. Os pontos azuis são os erros referentes a cada uma das 15 séries de 30 minutos. E o ponto verde refere-se ao erro da série completa com base nas 15 séries de 30 minutos calculado a partir da equação (6.5). . .	100
6.34	Direção da velocidade do vento da série completa (vermelho) e direções da velocidade do vento das séries de 30 minutos (preto). . . . .	100
6.35	Comportamento de R/S <i>versus</i> $\Delta$ e R/S <i>versus</i> $\Delta/T$ . . . . .	102
6.36	Comportamento de $(R/S)/((\delta_{\min}+\delta_{\max})/2)$ <i>versus</i> $\Delta$ e $(R/S)/((\delta_{\min}+\delta_{\max})/2)$ <i>versus</i> $\Delta/T$ . . . . .	103

## LISTA DE TABELAS

3.1	Valores de $H$ encontrados por Mandelbrot e Wallis (1969d) para registros hidrológicos e geofísicos. . . . .	34
3.2	Valores de $H$ encontrados por Burlando et al. (1996) para séries hidrológicas e geofísicas. . . . .	34
3.3	Valores de $H$ encontrados por Montanari et al. (1997) para séries de vazão do Lago Maggiore. . . . .	35
3.4	Valores de $H$ encontrados por Laushey (1951) para séries de flutuações de velocidade longitudinal e transversal da água. . . . .	36
3.5	Valores de $H$ encontrados por Nordin et al. (1972) para séries de flutuações turbulentas de velocidade medidos em experimentos de laboratório e em rios. . . . .	36
3.6	Valores de $H$ encontrados por Helland e Van Atta (1978) para séries geradas em um túnel de vento. . . . .	38
5.1	Parâmetros utilizados para o controle de qualidade dos dados . . . . .	45
5.2	Parâmetros $D$ e $r$ utilizados para o controle de qualidade dos dados. . . . .	45
5.3	Número de blocos de 30 minutos após o controle de qualidade. . . . .	46
5.4	Flutuações turbulentas de primeira, segunda e terceira ordem analisadas neste trabalho. . . . .	48
5.5	Melhores intervalos de $\Delta/\mathcal{T}_H$ para a lei de potência prevista pela equação (2.19) para os momentos de primeira ordem. . . . .	50
5.6	Melhores intervalos de $\Delta/\mathcal{T}_H$ para a lei de potência prevista pela equação (2.19) para os momentos de segunda ordem. . . . .	50
5.7	Melhores intervalos de $\Delta/\mathcal{T}_H$ para a lei de potência prevista pela equação (2.19) para os momentos de terceira ordem. . . . .	50
5.8	Melhores intervalos de $\Delta/\mathcal{T}_H$ para a lei de potência prevista pela equação 2.19 para as séries de dados de 30 minutos de Mahomet. . . . .	55
5.9	Melhores intervalos de $\Delta$ para a lei de potência prevista pela equação (2.19) para a série completa de $u$ , $v$ e $w$ medidos em Mahomet. . . . .	57
6.1	Estatísticas das estimativas de $H$ para 100 blocos de smfGn. . . . .	61

6.2	Estatísticas das estimativas de $H$ para 130 blocos de 30 minutos de $u'$ da campanha AHATS. . . . .	61
6.3	Teste t de Welch para avaliar a igualdade das médias de $H$ antes e depois da remoção da tendência linear para os dados de primeira ordem de Tijucas do Sul. . . . .	65
6.4	Teste t para avaliar se $H$ após a remoção da tendência linear é igual a $1/2$ para os dados de primeira ordem de Tijucas do Sul. . . . .	66
6.5	Estatística das razões entre as estimativas de erros MFA/MF e MFA/LP para a campanha de Tijucas do Sul. . . . .	87
6.6	Porcentagem média de subestimação das estimativas de LP e MF em relação a estimativa MFA para a campanha de Tijucas do Sul. . . . .	88
6.7	Valores médios de $H_p$ e $H_R$ para os blocos de 30 minutos. . . . .	97

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>21</b>
2.1	PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E AUTO-SIMILARES	21
2.2	ESCALA INTEGRAL, FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO E FUNÇÃO DE ESTRUTURA	22
2.3	ERROS ALEATÓRIOS	24
2.4	O FENÔMENO DE HURST	27
2.4.1	Métodos para a estimativa do expoente de Hurst	28
2.5	MOVIMENTO BROWNIANO FRACIONÁRIO E RUÍDO GAUSSIANO FRACIONÁRIO SUAVIZADO	31
<b>3</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>33</b>
3.1	ESTIMATIVAS DO EXPOENTE DE HURST EM SÉRIES HIDROLÓGICAS E GEOFÍSICAS	33
3.2	ESTIMATIVAS DO EXPOENTE DE HURST EM TURBULÊNCIA	35
<b>4</b>	<b>RESULTADOS TEÓRICOS</b>	<b>39</b>
<b>5</b>	<b>CAMPANHAS MICROMETEOROLÓGICAS, CONTROLE DE QUALIDADE E PROCESSAMENTO INICIAL DOS DADOS</b>	<b>43</b>
5.1	CAMPANHAS MICROMETEOROLÓGICAS	43
5.2	CONTROLE DE QUALIDADE	44
5.3	PROCESSAMENTO INICIAL DOS DADOS	46
5.3.1	Processamento inicial dos dados de Tijucas do Sul, Missal e AHATS	46
5.3.2	Processamento inicial dos dados de Mahomet	51
<b>6</b>	<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS</b>	<b>58</b>
6.1	COMPARAÇÃO DAS ESTIMATIVAS DO EXPOENTE DE HURST DE SÉRIES DE SMFGN E DE DADOS DE TURBULÊNCIA ATMOSFÉRICA	58
6.2	A RELAÇÃO ENTRE O FENÔMENO DE HURST E A REMOÇÃO DA TENDÊNCIA LINEAR	63
6.3	DIFERENÇAS ENTRE MFA E R/S NAS ESTIMATIVAS DE H	66
6.4	IMPLICAÇÃO DO FENÔMENO DE HURST NA ESTIMATIVA DE ERROS ALÉATÓRIOS	76

6.5	RELAÇÕES COM A TEORIA DE SIMILARIDADE DE MONIN-Obukhov	90
6.6	RESULTADOS REFERENTES A CAMPANHA MAHOMET . . . . .	93
6.6.1	Análise do expoente de Hurst e da estimativa de erros . . . . .	93
6.6.2	Análise do estimador $R/S$ . . . . .	101
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>104</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>107</b>



# 1 Introdução

A estimativa de erros aleatórios é um problema clássico em estatística. O erro aleatório é definido como o erro devido a um período médio insuficiente para que a média no tempo convirja para a média probabilística (Lumley e Panofsky, 1964; Lenschow et al., 1994). Em turbulência, como em outras áreas de estudo, o problema de estimar o erro aleatório acontece devido à dependência temporal do processo, ou seja, em turbulência as medições sucessivas não são independentes entre si.

Segundo Moncrieff et al. (1996) o erro aleatório diminui à medida que se aumenta o período médio de análise  $T$ . No entanto, em turbulência, o aumento do período médio de análise pode levar a uma série tão longa que surjem evidências de um comportamento não-estacionário. Salesky et al. (2012) comentam que o período máximo possível de análise, para evitar os efeitos de não-estacionariedade, é limitado pela evolução diurna da camada limite atmosférica, e não deve exceder uma hora. Mesmo assim, antes de serem feitos os cálculos estatísticos é comum recorrer a procedimentos como remoção da tendência linear e/ou outros tipos de filtragem.

Os erros aleatórios são de extrema importância em turbulência, na literatura encontra-se vários trabalhos que utilizam estimativas de erros, como por exemplo: Wyngaard (1973) que utiliza as estimativas de erros para estimar o tempo de média; Lenschow et al. (1994) os quais analisam qual o tamanho das séries de dados para a estimativa de covariâncias e momentos de até quarta ordem com um certo grau de significância; e Salesky e Chamecki (2012) os quais utilizam as estimativas de erros para analisar a validade da Teoria de Similaridade de Monin-Obukhov.

Desde o trabalho de Taylor (1935), é comum supor que a integral de zero até infinito da função de autocorrelação euleriana, definida como a escala integral  $\mathcal{T}$ , existe. Tomando como base a existência da escala integral, Lumley e Panofsky (1964, p. 36–37) mostram que o erro médio quadrático pode ser relacionado com a variância, o período de análise  $T$  e a escala integral  $\mathcal{T}$ .

Em turbulência atmosférica a estimativa estatística da escala integral não é trivial. A limitação no período de análise  $T$  implica que, mesmo em casos que teoricamente a escala integral exista, a função de autocorrelação amostral nunca converge para zero e apresenta

oscilações em torno de zero (Yaglom, 1987, p. 237–244), o que torna na prática impossível a integração numérica. Este problema pode ser evitado aumentando o período de análise; no entanto, isto não é possível em análises atmosféricas devido à limitação em  $T$  imposta pela não-estacionariedade. Na prática, a maioria dos pesquisadores estimam a escala integral através da integração numérica da função de autocorrelação até o primeiro cruzamento no eixo das abscissas (Sreenivasan et al., 1978; Lenschow e Stankov, 1986; Katul e Parlange, 1995; Salesky et al., 2012) ou multiplicam a função de autocorrelação por funções chamadas de *lag-window* fazendo com que o comportamento desta combinação convirja para zero (Dias et al., 2004; Bernardes e Dias, 2010).

Segundo Salesky et al. (2012) a estimativa da escala integral pode ser altamente sensível ao método utilizado e produzir incertezas na estimativa do erro. A necessidade da estimativa da escala integral pode ser evitada no método de *bootstrapping* (Gluhovsky e Agee, 1994; Garcia et al., 2006) e vários trabalhos encontrados na literatura para estimar erros em turbulência utilizam este método, como por exemplo Wyngaard (1973); Dias et al. (2004); Bernardes e Dias (2010) e Salesky et al. (2012).

Outra alternativa que, *a priori*, não precisa de uma estimativa da escala integral é o Método de Filtragem (MF) proposto por Salesky et al. (2012). O objetivo desse método é estimar o erro aleatório de momentos turbulentos de qualquer ordem através da decomposição espacial local baseada em propriedades de filtros espaciais. Salesky et al. (2012) estimam o comportamento do erro para várias escalas  $\Delta$  de tempo (entendidas como a largura do filtro) e a partir do ajuste de uma lei de potência com decaimento  $\Delta^{-p}$ , onde  $p = 1$ , extrapolam esse comportamento para um período médio  $T$ , período para o qual está sendo realizada a análise dos dados. Note que em turbulência o período de análise não deve ultrapassar 1 hora.

Tomando como base a importância da estimativa de erros aleatórios em turbulência e as limitações na estimativa da escala integral, um dos objetivos deste trabalho é mostrar que a equação do erro médio quadrático proposta por Lumley e Panofsky (1964) pode ser adaptada de modo que a escala integral não precisa ser finita e que o Método de Filtragem pode ser ajustado e continuar fornecendo estimativas de erro confiáveis, mesmo quando, teoricamente, a escala integral não existe. Esta abordagem foi proposta neste trabalho motivada pela questão de que estudos anteriores (Crivellaro et al., 2013; Crivellaro, 2014) verificaram com dados turbulentos que o expoente  $p$  no Método de Filtragem é diferente de 1 e que isso acontece devido ao fenômeno de Hurst em turbulência. No decorrer deste trabalho este novo método será referenciado como MFA (Método de Filtragem Adaptado) e, além de possibilitar a estimativa de erros, também possibilita quantificar o fenômeno de Hurst.

O fenômeno de Hurst foi descoberto por Hurst (1951) enquanto estudava o dimensiona-

mento de reservatórios e sugere que a série de dados apresenta memória de longo prazo. Este fenômeno é caracterizado pelo expoente de Hurst  $H$ , e o método clássico para a estimativa do mesmo é chamado de intervalo ajustado, abreviadamente R/S. O expoente de Hurst pode variar de 0 até 1 e a ausência do fenômeno de Hurst acontece quando  $H = 1/2$ .

Mandelbrot e Wallis (1968) sugerem que o fenômeno de Hurst pode ser característico de uma ampla variedade de dados, desde séries temporais consistindo principalmente de componentes de alta frequência como a turbulência, até séries com componentes de baixa frequência, tais como registros climáticos de longo prazo, temperatura, precipitação e vazão. Mandelbrot e van Ness (1968) comentam que as implicações do fenômeno de Hurst em turbulência são: a escala integral não existe, e as flutuações turbulentas de velocidade têm propriedades de um ruído Gaussiano fracionário (fGn), no entanto no decorrer deste trabalho será mostrado que o fGn não modela corretamente a turbulência.

Mesa e Poveda (1993) e Bras e Rodríguez-Iturbe (1993) comentam que existem três linhas de pensamento que explicam o fenômeno de Hurst: (i) o fenômeno de Hurst é um comportamento transiente, ou seja, o tamanho das séries de dados não é suficientemente grande para que se possa observar o comportamento de longo prazo; (ii) o fenômeno de Hurst ocorre devido à não-estacionariedade; e (iii) o fenômeno de Hurst é devido a processos estacionários cujas funções de autocorrelação decaem muito lentamente, de tal forma que suas integrais não convergem. Bras e Rodríguez-Iturbe (1993) comentam que, estatisticamente, não é possível determinar a real causa do fenômeno de Hurst.

Em turbulência, o fenômeno de Hurst já foi detectado em flutuações de velocidade longitudinal e transversal da água por Laushey (1951), em séries de flutuações turbulentas de velocidade medidas em laboratório e nos rios Missouri e Mississippi por Nordin et al. (1972) e em dados de turbulência em túnel de vento por Helland e Van Atta (1978). Na literatura também é possível encontrar trabalhos que detectaram o fenômeno de Hurst em séries hidrológicas, hidroclimatológicas e geofísicas, por exemplo Mandelbrot e Wallis (1969c,d); Burlando et al. (1996); Montanari et al. (1997); Vogel et al. (1998) e Koutsoyiannis (2002), conforme já tinha sido verificado nos trabalhos do Hurst, e no campo de financeiro, por exemplo Carbone et al. (2004); Granero et al. (2008) e Kristoufek (2010).

Levando em consideração o fenômeno de Hurst em turbulência, o segundo objetivo desse trabalho é analisar o expoente de Hurst em flutuações turbulentas atmosféricas utilizando a abordagem proposta neste trabalho (o método MFA) e o método clássico R/S. Na literatura revista, foi verificado que nos campos de hidrologia, hidroclimatologia e finanças, como também em sequências de ruído Gaussiano fracionário e ARIMA fracionário, as estimativas de  $H$  utilizando o estimador proposto neste trabalho, o qual é formalmente idêntico ao método utilizado nos trabalhos citados, são significativamente diferentes das estimativas utilizando o método clássico de Hurst R/S (Taqqu et al., 1995; Burlando et al., 1996; Montanari et al.,

1997; Bisaglia e Guégan, 1998).

Embora já se saiba há muito tempo que os dados de turbulência exibem o fenômeno de Hurst, as implicações no cálculo das estimativas de erros das estatísticas de turbulência ainda não foram exploradas: em nossa pesquisa, não foram encontrados trabalhos que relacionem estes dois temas explicitamente, exceto em [Dias et al. \(2018\)](#), o qual foi publicado a partir dos estudos deste trabalho. Desta forma, o terceiro objetivo deste trabalho é analisar estas implicações. Para isto será realizado a comparação dos erros estimados pela abordagem proposta neste trabalho, a qual leva em consideração o fenômeno de Hurst, com outros dois métodos encontrados na literatura: o método clássico proposto por [Lumley e Panofsky \(1964\)](#) e o Método de Filtragem proposto por [Salesky et al. \(2012\)](#).

Os dados utilizados neste trabalho são provenientes de quatro campanhas micrometeorológicas: a primeira realizada em uma grameira localizada em Tijucas do Sul, Paraná; a segunda realizada em uma ilha localizada no lago do reservatório de Itaipu nas proximidades da cidade de Missal, Paraná; a terceira realizada na cidade de Kettleman, California, Estados Unidos, e por fim a quarta realizada em uma plantação de milho perto de Mahomet, Illinois, Estados Unidos. É importante notar que literalmente todas as conclusões deste trabalho independem do conjunto de dados analisado.

O conteúdo desta tese está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 serão apresentados fundamentos teóricos necessários para um melhor entendimento deste trabalho. No Capítulo 3 será apresentada uma revisão bibliográfica sobre estudos que detectaram o fenômeno de Hurst em séries hidrológicas, geofísicas e em turbulência. No Capítulo 4 será apresentado o desenvolvimento do método proposto neste trabalho para estimativa do expoente de Hurst e estimativa do erro aleatório. As campanhas micrometeorológicas, o controle de qualidade dos dados e o processamento inicial dos dados serão descritos no Capítulo 5. No Capítulo 6 serão apresentados os resultados experimentais referentes às análises do fenômeno de Hurst e estimativas de erros. E por fim, no Capítulo 7 serão apresentadas as conclusões e recomendações deste trabalho.

## 2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo serão apresentados conceitos importantes que foram utilizados para o desenvolvimento deste trabalho. Primeiramente apresentaremos os conceitos de processos estocásticos e auto-similares, escala integral e as funções de autocorrelação e de estrutura. Esses conceitos estão relacionados ao fenômeno de Hurst e à estimativa dos erros aleatórios, os quais serão descritos na sequência. Por fim, será descrita a formulação do movimento Browniano fracionário e do ruído Gaussiano fracionário suavizado e discutiremos o porque essas séries sintéticas não são adequadas para modelagem da turbulência atmosférica.

### 2.1 Processos estocásticos e auto-similares

Um processo estocástico é uma função  $X(\omega, t)$  de dois argumentos, com  $\omega \in \Omega$  e  $t \in \mathbb{R}$ , sendo  $\Omega$  o espaço amostral. Tem-se que para cada  $\omega$ ,  $X(\omega, t)$  é uma função de  $t$  e para cada  $t$ ,  $X(\omega, t)$  é uma variável aleatória (Chorin e Hald, 2009; Todorovic, 2012). Em outras palavras, tem-se que a cada realização  $\omega$  ao invés do resultado ser um número real ele é uma função, como pode ser visto na Figura 2.1.

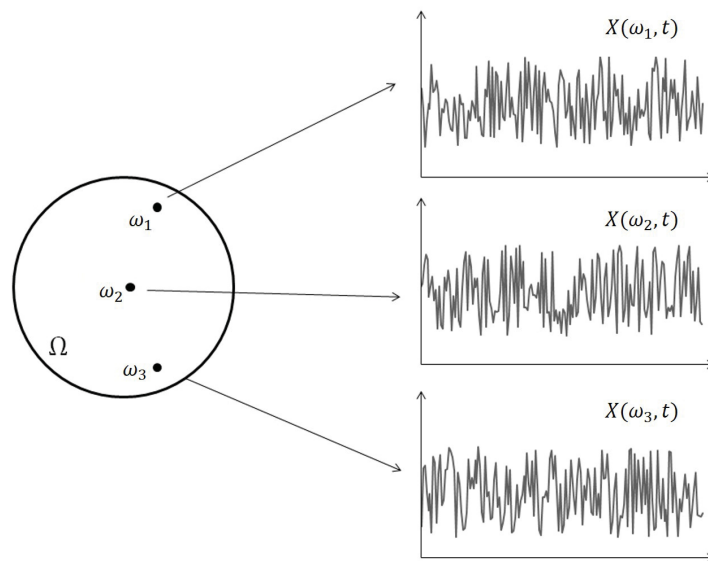


Figura 2.1: Esquema gráfico de um processo estocástico.

Já os processos auto-similares são processos estocásticos que são invariantes em distribuição sob uma mudança na escala de tempo. Estes processos geralmente podem ser utilizados para modelar fenômenos aleatórios com memória de longo prazo (Embrechts e Maejima, 2000). Embrechts e Maejima (2002) definem que um processo estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$  é chamado de auto-similar se, para qualquer  $a > 0$ , existe um  $b > 0$  de tal forma que

$$\{X(at)\} \stackrel{d}{=} \{bX(t)\}.$$

onde  $\stackrel{d}{=}$  é a igualdade em distribuição.

Dizemos que um processo  $\{X(t), t \geq 0\}$  é estocasticamente contínuo em  $t$  se para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} P\{|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon\} = 0$ , onde  $P$  é uma medida de probabilidade. Também podemos dizer que  $\{X(t), t \geq 0\}$  é trivial se  $X(t)$  é quase sempre constante para cada  $t$  (Embrechts e Maejima, 2002).

Se  $\{X(t), t \geq 0\}$  é não-trivial, estocasticamente contínuo em  $t = 0$  e auto-similar, então existe um  $H \geq 0$  tal que  $b$  pode ser substituído por  $a^H$ . Assim a formulação de um processo auto-similar fica da seguinte forma (Mandelbrot, 1965; Rezakhah et al., 2010):

$$\{X(at)\} \stackrel{d}{=} \{a^H X(t)\}.$$

Os processos auto-similares são caracterizados pelo expoente de Hurst  $H$ , também chamado de “expoente” ou “índice” de auto-similaridade (Taqqu, 2004). Um exemplo de processo auto-similar com  $H = 1/2$  (processo que não apresenta memória de longo prazo) é o movimento Browniano (Mandelbrot, 1965) (ver descrição do movimento Browniano na Seção 2.5).

Veja na Subseção 2.4.1 que a definição de processos auto-similares é utilizada no desenvolvimento do método para estimativa do expoente de Hurst utilizando a transformada de *wavelet*, e no Capítulo 4 que a relação entre o expoente de Hurst e a lei de potência para o erro médio quadrático (equação (4.1)) só vale para processos auto-similares.

## 2.2 Escala integral, função de autocorrelação e função de estrutura

A escala integral pode ser definida como a escala, de tempo ou comprimento, na qual a energia da turbulência é introduzida no escoamento. Desde o trabalho de Taylor (1935), é comum supor que a integral de zero até infinito da função de autocorrelação  $\rho(\eta)$  euleriana de  $x$ , a escala integral  $\mathcal{T}$ , existe

$$\mathcal{T} = \int_0^\infty \rho(\eta) d\eta. \quad (2.1)$$

Para estimarmos a escala integral de acordo com a definição de Taylor (1935) (equação (2.1)) é necessário realizar a integração da função de autocorrelação até infinito. No entanto

quando trabalhamos com dados provenientes de campanhas micrometeorológicas geralmente a função de autocorrelação não converge e oscila em torno de zero (ver este comportamento na Figura 5.2). Devido a estas oscilações a integração de  $\rho(\eta)$  só pode ser realizada até um  $\eta_{\max}$  arbitrário, sendo que a escolha de  $\eta_{\max}$  pode afetar na estimativa de  $\mathcal{T}$ . Alguns trabalhos encontrados na literatura calculam a integral até o primeiro ponto em que a função de autocorrelação cruza o eixo das abscissas (Sreenivasan et al., 1978; Lenschow e Stankov, 1986; Katul e Parlange, 1995; Salesky et al., 2012), enquanto que outros realizam a integração até que um valor positivo pequeno da função de autocorrelação seja atingido (Finkelstein e Sims, 2001). Outro comportamento também encontrado em análises com dados de campo é que a função de autocorrelação não converge, e consequentemente, a escala integral é infinita. Este caso ocorre quando os dados analisados exibem o fenômeno de Hurst (Crivellaro, 2014; Dias et al., 2018), o qual será descrito na Seção 2.4.

Outro método para estimar a escala integral é supor que a função de autocorrelação tem a forma do seguinte decaimento exponencial:  $\rho(\eta) = \exp(-\eta/\mathcal{T})$  e realizar um ajuste de mínimos quadrados não-linear (Moore et al., 1985; Kaimal e Finnigan, 1994; Lenschow et al., 1994; Sullivan et al., 2003).

A escala integral também pode ser definida em termos espectrais (Kaimal e Finnigan, 1994):

$$\mathcal{T} = \frac{\pi}{2\sigma_a^2} [S_{xx}(f)]_{f=0}, \quad (2.2)$$

onde  $f$  é a frequência cíclica e  $S_{xx}$  é o espectro unilateral ( $0 \leq f < \infty$ ) definido como

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\xi) e^{-i2\pi f\xi} d\xi, \quad (2.3)$$

onde  $C_{xx}$  é a função de autocovariância, a qual será definida na sequência.

A ordem de grandeza da escala integral também pode ser estimada em termos da velocidade média do vento  $\bar{U}$  e da altura de medição  $z$  (Wyngaard, 1973)

$$\mathcal{T} \approx \frac{z}{\bar{U}}. \quad (2.4)$$

A função de autocorrelação  $\rho(\eta)$ , função utilizada para a estimativa da escala integral (equação (2.1)), é dada por

$$\rho(\eta) = \frac{C_{xx}(\eta)}{C_{xx}(0)}, \quad (2.5)$$

onde  $C_{xx}$  é a função de autocovariância dada por

$$C_{xx}(\eta) = \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t + \eta) - \langle x \rangle) \rangle. \quad (2.6)$$

Segundo [Wei \(2006\)](#) e [Chatfield \(2009\)](#) a função de autocorrelação para séries de dados temporais é estimada por:

$$R_{xx}(\eta) = \frac{1}{N} \frac{\sum_{t=0}^{N-1-\eta} (x_t - \bar{x})(x_{t+\eta} - \bar{x})}{\sigma_x^2}. \quad (2.7)$$

onde  $\bar{x}$  e  $\sigma_x^2$  são respectivamente a média e a variância amostral de  $x$ .

Conforme já comentado, a função de autocorrelação não converge em análises de dados de turbulência atmosférica, assim uma alternativa é utilizar a função de estrutura de segunda ordem definida por ([Lumley e Panofsky, 1964](#))

$$D_{xx}(\eta) = \langle [x(t+\eta) - x(t)]^2 \rangle. \quad (2.8)$$

Para um processo estacionário,  $C_{xx}$ ,  $D_{xx}$  e  $\rho(\eta)$  são relacionados por

$$\delta(\eta) \equiv \frac{D_{xx}(\eta)}{2C_{xx}(0)} = 1 - \rho(\eta). \quad (2.9)$$

Para um processo não-estacionário,  $C_{xx}$  não existe, porém  $D_{xx}$  existe se o processo possuir incrementos estacionários ([Dias et al., 2004](#)).

Essas definições são importantes, visto que para a estimativa da escala integral é necessária a existência (processos estacionários) e a convergência da função de autocorrelação (processos que não exibem o fenômeno de Hurst). A estimativa da escala integral é de extrema importância para a estimativa do erro aleatório quando são utilizados os métodos clássicos, como por exemplo o método proposto por [Lumley e Panofsky \(1964\)](#) (ver Seção 2.3). A função de autocorrelação e a função de estrutura também serão utilizadas para estimativa do expoente de Hurst (ver resultados na Seção 6.1).

## 2.3 Erros aleatórios

Dado um processo estocástico  $x(\omega, t)$ , onde  $\omega$  é o índice de um conjunto de realizações, um problema clássico em estatística é a estimativa do erro da média amostral de  $\tilde{x}$  em um intervalo de tempo  $\Delta$ . Em turbulência a estimativa de erros aleatórios é um problema, visto que as séries de dados possuem dependência temporal.

Por definição, se  $x(t)$  é a realização de um processo estocástico estacionário, a média amostral para uma escala  $\Delta$  é:

$$\tilde{x}_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} x(t') dt'. \quad (2.10)$$

Em hidrologia, onde o fenômeno de Hurst foi primeiramente identificado,  $x(t)$  representa a



vazão de entrada de um reservatório, e a entrada total de água neste reservatório entre  $t$  e  $t + \Delta$  é dada por  $\Delta \tilde{x}_\Delta(t)$ .

Se  $x(\omega, t)$  é um processo estocástico estacionário, então  $\tilde{x}(\omega, t)$  também é um processo estocástico estacionário. Em particular, as médias probabilísticas são as mesmas:  $\langle \tilde{x}_\Delta \rangle = \langle x \rangle$ . Na mesma linha de pensamento, as estatísticas de população de  $\tilde{x}(\omega, t)$ , tais como o erro médio quadrático (MSE), também devem ser invariantes sob uma variação no tempo e, portanto, não devem depender de  $t$ . Assim, o erro médio quadrático de  $\tilde{x}_\Delta$  é

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\tilde{x}_\Delta) &= \langle [\tilde{x}_\Delta - \langle \tilde{x}_\Delta \rangle]^2 \rangle = \langle [\tilde{x}_\Delta - \langle x \rangle]^2 \rangle \\ &= \left\langle \left[ \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta x(t) dt - \langle x \rangle \right]^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \int_{t=0}^\Delta \int_{\eta=0}^\Delta \langle [x(t) - \langle x \rangle][x(\eta) - \langle x \rangle] \rangle d\eta dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para um processo estacionário, o integrando da equação (2.11) é a função de autocovariância. Considerando as propriedades simétricas da função de autocovariância para um processo estocástico estacionário, tem-se que  $C_{xx}(t, \eta) = C_{xx}(0, \eta - t) = C_{xx}(\eta - t)$ . Desta forma, podemos reescrever a função de autocovariância da seguinte forma:

$$C_{xx}(\eta - t) = \text{Var}\{x\} \varrho(\eta - t), \quad (2.12)$$

onde  $\text{Var}\{x\}$  é a variância probabilística de  $x$  e  $\varrho(\eta - t)$  é a função de autocorrelação. A partir disto, o MSE pode ser reescrito como

$$\text{MSE}(\tilde{x}_\Delta) = \frac{\text{Var}\{x\}}{\Delta^2} \int_{t=0}^\Delta \int_{\eta=0}^\Delta \varrho(\eta - t) d\eta dt. \quad (2.13)$$

A fim de simplificar a equação (2.13), faremos a seguinte mudança de variáveis ([Crivellaro, 2014](#)):

$$\xi = t, \quad (2.14)$$

$$\eta = \tau - t. \quad (2.15)$$

A integral da equação (2.13) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{\Delta} \int_{\tau=0}^{\Delta} \varrho(\tau - t) d\tau dt &= \int_{\eta=-\Delta}^0 \int_{\xi=-\eta}^{\Delta} \varrho(\eta) d\xi d\eta + \int_{\eta=0}^{\Delta} \int_{\xi=0}^{\Delta-\eta} \varrho(\eta) d\xi d\eta, \\
&= \int_{\eta=-\Delta}^0 \varrho(\eta) \int_{\xi=-\eta}^{\Delta} d\xi d\eta + \int_{\eta=0}^{\Delta} \varrho(\eta) \int_{\xi=0}^{\Delta-\eta} d\xi d\eta, \\
&= - \int_{\eta=\Delta}^0 \varrho(-\eta) \int_{\xi=\eta}^{\Delta} d\xi d\eta + \int_{\eta=0}^{\Delta} \varrho(\eta) \int_{\xi=0}^{\Delta-\eta} d\xi d\eta, \\
&= \int_{\eta=0}^{\Delta} \varrho(-\eta) \int_{\xi=\eta}^{\Delta} d\xi d\eta + \int_{\eta=0}^{\Delta} \varrho(\eta) \int_{\xi=0}^{\Delta-\eta} d\xi d\eta, \\
&= \int_{\eta=0}^{\Delta} \varrho(\eta) (\Delta - \eta) d\eta + \int_{\eta=0}^{\Delta} \varrho(\eta) (\Delta - \eta) d\eta. \\
&= 2 \int_{\eta=0}^{\Delta} (\Delta - \eta) \varrho(\eta) d\eta.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Substituindo (2.16) em (2.13), o resultado obtido é

$$\text{MSE}(\tilde{x}_{\Delta}) = \frac{2 \text{Var}\{x\}}{\Delta} \int_0^{\Delta} \left(1 - \frac{\eta}{\Delta}\right) \varrho(\eta) d\eta. \tag{2.17}$$

Considerando que a função de autocorrelação é absolutamente integrável, e consequentemente que a escala integral existe (equação (2.1)), se  $\mathcal{T} \ll \Delta$ , [Liepmann \(1952\)](#) e [Lumley e Panofsky \(1964\)](#) mostram que o MSE pode ser aproximado por

$$\text{MSE}(\tilde{x}_{\Delta}) \approx \frac{2\mathcal{T}}{\Delta} \text{Var}\{x\}. \tag{2.18}$$

Neste trabalho chamaremos a equação (2.18) de Equação de Lumley-Panofsky.

Conforme comentado no Capítulo 1, a estimativa da escala integral não é trivial em turbulência. Tomando como base a Equação de Lumley-Panosfky, [Salesky et al. \(2012\)](#) desenvolveram o Método de Filtragem (MF), o qual *a priori* não necessita de uma estimativa da escala integral, com o objetivo de estimar o erro aleatório de momentos turbulentos de qualquer ordem através da decomposição espacial local baseada em propriedades de filtros espaciais. O método consiste em filtrar o processo estocástico  $x$  com um filtro de largura  $\Delta$  ( $\tilde{x}_{\Delta}$  – equação (2.10)). Na sequência, é necessário calcular o erro médio quadrático de  $\tilde{x}_{\Delta}$  para várias escalas  $\Delta$  e o comportamento de  $\text{MSE}(\tilde{x}_{\Delta})$  decresce com  $\Delta$  segundo a lei de potência dada por:

$$\text{MSE}(\tilde{x}_{\Delta}) = c\Delta^{-p}. \tag{2.19}$$

Já a raiz do erro médio quadrático (RMSE) é dada por

$$\text{RMSE}(\tilde{x}_{\Delta}) = c^{1/2} \Delta^{-p/2}. \tag{2.20}$$

O erro aleatório para o período  $T$  (tamanho da amostra, o qual em turbulência atmosférica não deve ser maior que uma hora) é estimado através da extrapolação da lei de potência até  $T$ . Salesky et al. (2012) fixam o expoente da lei de potência em  $p = 1$ , e implicitamente o método admite a existência da escala integral, a qual pode ser determinada posteriormente. Salesky et al. (2012) sugerem os seguintes limites para fazer o ajuste dos dados: momentos de primeira ordem –  $\Delta_{\min} = 2\mathcal{T}$  e  $\Delta_{\max} = T/4$  e momentos de segunda ordem –  $\Delta_{\min} = 2\mathcal{T}$  e  $\Delta_{\max} = T/10$ . A escala integral  $\mathcal{T}$  é estimada calculando a integral da função de autocorrelação até o primeiro ponto de cruzamento no eixo das abscissas e o intervalo entre  $\Delta_{\min}$  e  $\Delta_{\max}$  deve ser espaçado uniformemente em escala logarítmica.

Salesky e Chamecki (2012) comentam que os erros aleatórios estimados pelo Método de Filtragem desenvolvido por Salesky et al. (2012) são semelhantes às estimativas encontradas por outros métodos, como, por exemplo, os métodos apresentados em Lumley e Panofsky (1964); Lenschow et al. (1994); Garcia et al. (2006).

No Capítulo 4 mostraremos que a Equação de Lumley-Panofsky pode ser adaptada de forma que a escala integral não precisa ser finita. Deixando o expoente  $p$  do Método de Filtragem variar livremente, desenvolveremos uma nova metodologia para estimativas de erros, a qual leva em consideração o fenômeno de Hurst. O método desenvolvido será referenciado como Método de Filtragem Adaptado (MFA) e também possibilita a estimativa do expoente de Hurst  $H$  (ver relação entre  $p$  e  $H$  na equação (4.1)). No Capítulo 6 apresentaremos uma comparação entre as estimativas de erros: equação Lumley-Panofski, Método de Filtragem e método MFA, a fim de analisar os efeitos do fenômeno de Hurst na estimativa de erros.

## 2.4 O fenômeno de Hurst

O fenômeno de Hurst foi descoberto enquanto Hurst (1951) estudava o dimensionamento de reservatórios e sugere que as séries de dados apresentam memória de longo prazo. O expoente de Hurst  $H$  pode variar de 0 a 1 e os seguintes casos são possíveis: (i)  $0 < H < 1/2$ : este caso é chamado de anti-persistência (Mansukhani, 2012); (ii)  $H = 1/2$ : este valor de  $H$  significa ausência do fenômeno de Hurst, ou seja, não há memória de longo prazo (Mandelbrot e Wallis, 1969c); e (iii)  $1/2 < H < 1$ : este é o intervalo que determina o fenômeno de Hurst, sendo que quanto maior o valor de  $H$  mais intenso é o fenômeno. Ao contrário de uma série de dados com memória de longo prazo, em uma série anti-persistente um comportamento crescente é logo acompanhado de um comportamento decrescente e vice-versa (Mansukhani, 2012).

A ocorrência do “fenômeno de Hurst” em turbulência não é uma novidade. Sutton (1932) propôs que a função de autocorrelação das componentes da velocidade do vento decaem com  $\eta^{-q}$ , sendo que  $0 < q < 1$ . A relação entre o expoente de Hurst  $H$  e da lei de potência  $q$  é

dada por:

$$H = 1 - \frac{q}{2}. \quad (2.21)$$

Sutton (1932) obteve valores de  $q$  equivalentes a  $H = 0,875$  e  $H = 1$  (violando o intervalo definido para  $q$ ) em modelos de difusão atmosférica. Como notado por Taylor (1935), esses valores implicam na não-existência da escala integral.

Historicamente o fenômeno de Hurst foi primeiramente investigado por Hurst usando estatísticas relacionadas com Hidrologia (Hurst, 1951; Mandelbrot e Wallis, 1968). O método desenvolvido por Hurst para estimativa do expoente de Hurst se chama intervalo ajustado, abreviadamente conhecido como R/S.

Outro método muito utilizado para a estimativa do expoente de Hurst é chamado de variância agregada (Beran, 1989; Taqqu et al., 1995; Burlando et al., 1996; Montanari et al., 1997; Bisaglia e Guégan, 1998). Esse método é formalmente idêntico ao método MFA, o qual será proposto neste trabalho (ver Capítulo 4).

Além do R/S ( $H_R$ ) e do MFA ( $H_p$ ), utilizaremos neste trabalho as seguintes metodologias para estimativa do expoente de Hurst: a partir da lei de potência da função de autocorrelação ( $H_A$ ) e da função de estrutura ( $H_D$ ) (Gilmore et al., 2002; Yu et al., 2003), a partir da transformada de wavelet ( $H_W$ ) (Simonsen et al., 1998; Torrence e Compo, 1998; Katul et al., 2001; Simonsen, 2003; Oswiecimka et al., 2006; Chamoli et al., 2007), e o método *zero-crossing* ( $H_Z$ ) (Coeurjolly, 2000; Shi et al., 2005).

Além de todos os métodos utilizados neste trabalho, uma grande quantidade de outros métodos para estimar do expoente de Hurst ainda podem ser encontrados em Beran (1994), Peng et al. (1994), Taqqu et al. (1995), Caccia et al. (1997), Bisaglia e Guégan (1998) e Hu et al. (2001).

### 2.4.1 Métodos para a estimativa do expoente de Hurst

Nesta subseção detalharemos a formulação do método do intervalo ajustado, do método do coeficiente de *wavelet* promediado (o qual é baseado na transformada de *wavelet*) e do método *zero-crossing*. O desenvolvimento e a formulação do método MFA são apresentados no Capítulo 4. A estimativa do expoente de Hurst a partir da lei de potência das funções de autocorrelação e de estrutura é realizada ajustando aos dados, respectivamente, as seguintes leis de potências:  $a\eta^{-q}$  e  $2\text{Var } x - a\eta^{-q}$ . A relação entre  $q$  e  $H$  é dada pela equação (2.21).

#### Intervalo ajustado

Hurst (1951, 1956) e Hurst et al. (1965) estudaram o comportamento do intervalo ajustado em vários fenômenos geofísicos da natureza, tais como anéis de árvore, séries de chuva, e séries de vazão, com destaque para a série de vazões anuais mínimas do Rio Nilo. O R/S

é uma razão entre o intervalo  $R^*(t)$  e a variância amostral  $s^2(t)$ , os quais são definidos para uma escala de tempo  $\Delta$  como:

$$R_{\Delta}^*(t) = \max_{0 \leq \delta \leq \Delta} [\delta (\tilde{x}_{\delta}(t) - \tilde{x}_{\Delta}(t))] - \min_{0 \leq \delta \leq \Delta} [\delta (\tilde{x}_{\delta}(t) - \tilde{x}_{\Delta}(t))], \quad (2.22)$$

$$s_{\Delta}^2(t) = \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} [x(t') - \tilde{x}_{\Delta}(t)]^2 dt', \quad (2.23)$$

sendo que  $\tilde{x}_{\Delta}(t)$  e  $\tilde{x}_{\delta}(t)$  são definidos por (2.10). Tem-se que intervalo ajustado é dado por

$$R_{\Delta}^{**}(t) = \frac{R_{\Delta}^*(t)}{s_{\Delta}(t)}, \quad (2.24)$$

e o fenômeno de Hurst é relacionado com o intervalo ajustado por

$$\langle R_{\Delta}^{**}(t) \rangle = \left\langle \frac{R_{\Delta}^*(t)}{s_{\Delta}(t)} \right\rangle = c \Delta^H. \quad (2.25)$$

Mandelbrot e Wallis (1969d) comentam que para estimar o expoente de Hurst  $H$  deve-se plotar  $\log(\langle R_{\Delta}^{**}(t) \rangle)$  versus  $\log(\Delta)$ . O expoente  $H$  é obtido através do ajuste dos dados os quais são fortemente alinhados.

### Estimativa do expoente de Hurst utilizando a transformada de *wavelet*

Existem diferentes metodologias para a estimativa do expoente de Hurst utilizando a transformada de *wavelet* (Arneodo et al., 1995; Jones et al., 1996; Simonsen et al., 1998). Neste trabalho utilizaremos o método do coeficiente de *wavelet* promediado (CWP). Segundo Simonsen et al. (1998), esta metodologia é a mais simples e é capaz de fornecer bons resultados.

As *wavelets* são definidas por um parâmetro de dilatação  $a > 0$  e um parâmetro de translação  $-\infty < b < \infty$

$$\psi_{a;b}(t) = \psi \left( \frac{t-b}{a} \right), \quad (2.26)$$

onde  $\psi(t)$  é chamada de *wavelet* mãe (Chamoli et al., 2007). Existem vários tipos de *wavelet* mãe, dentre elas: Daubechies, Haar, Marr ou Mexicana, Morlet, Paul, etc. (Daubechies, 1990, 1992; Farge, 1992; Torrence e Compo, 1998; Kaiser, 2010). A *wavelet* mãe utilizada neste trabalho foi da família Daubechie. Os cálculos da transformada de *wavelet* foram realizados com o auxílio da biblioteca de *Python* chamada PyYAWT (<https://pyyawt.readthedocs.io/>).

Dada uma função  $h(t)$ , a transformada contínua de *wavelet* é definida como (Simonsen

et al., 1998)

$$W[h](a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a;b}^*(t) h(t) dt, \quad (2.27)$$

onde  $\psi_{a;b}^*(t)$  denota o complexo conjugado de  $\psi(t)_{a;b}$ .

Para um processo auto-similar temos que  $h(t) \simeq \lambda^{-H} h(\lambda t)$ , onde  $\simeq$  significa estatisticamente equivalente, assim

$$W[h(t)](a, b) \simeq W[\lambda^{-H} h(\lambda t)](a, b), \quad (2.28)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{-H} h(\lambda t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt. \quad (2.29)$$

Fazendo  $t' = \lambda t$

$$\begin{aligned} W[h(t)](a, b) &= \lambda^{-H} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \psi^* \left( \frac{t' - \lambda b}{\lambda a} \right) dt', \\ &= \lambda^{-H-1/2} W[h(t)](\lambda a, \lambda b). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Finalmente temos que

$$W[h](\lambda a, \lambda b) = \lambda^{1/2+H} W[h](a, b). \quad (2.31)$$

Promediando a equação (2.31) em função de  $b$ ,  $W[h](a) = \langle |W[h](a, b)| \rangle_b$ , temos

$$W[h](\lambda a) \simeq \lambda^C W[h](a). \quad (2.32)$$

Para se definir o expoente de Hurst, deve-se plotar o logaritmo de  $W[h](\lambda a)$  versus o logaritmo da escala de dilatação  $a$  e ajustar uma reta aos dados. O coeficiente angular da reta ( $C$ ) é relacionado com  $H$  por:

$$H = C - 1/2. \quad (2.33)$$

### Método *zero-crossing* para estimativa do expoente de Hurst

O método *zero-crossing* é o único método utilizado neste trabalho em que o expoente de Hurst não é estimado graficamente. Este método é baseado em realizar uma contagem do número de vezes ( $Z_N$ ) em que a série de dados cruza o eixo  $x$ . O expoente de Hurst é definido por (Shi et al., 2005)

$$H = \frac{1}{2} \{1 + \log_2(1 \pm |\cos(\pi S_N)|)\} \quad (2.34)$$

onde  $S_N = Z_N/(N-1)$  é a média da contagem do número de cruzamentos no eixo  $x$ , sendo

$N$  o tamanho da série de dados. O sinal  $\pm$  é escolhido de acordo com o valor real de  $H$ : escolhe-se o sinal  $+$  para  $H > 1/2$  e o sinal  $-$  para  $H < 1/2$ .

## 2.5 Movimento Browniano fracionário e ruído Gaussiano fracionário suavizado

Nesta seção será descrito o movimento Browniano fracionário e o ruído Gaussiano fracionário suavizado, séries sintéticas que exibem o fenômeno de Hurst. No entanto, no decorrer deste trabalho mostraremos que estas séries não são bons modelos para a turbulência atmosférica (ver resultados no Capítulo 6). Primeiramente temos que o movimento Browniano (Bm) refere-se a um modelo matemático utilizado para descrever movimentos aleatórios. O Bm é um processo estocástico  $X(\omega, t)$  com  $\omega \in \Omega$ ,  $0 < t < 1$ , que satisfaz os seguintes axiomas (Mandelbrot e van Ness, 1968; Chorin e Hald, 2009):

1.  $B(\omega, 0) = 0$  para todos os  $\omega$ 's;
2. Para cada  $\omega$ ,  $B(\omega, t)$  é uma função contínua em  $t$ ;
3. Para cada  $0 \leq t_1 \leq t_2$ ,  $B(\omega, t_2) - B(\omega, t_1)$  é uma variável Gaussiana com média zero e variância  $t_2 - t_1$ ;
4.  $B(\omega, t)$  tem incrementos independentes; por exemplo: se  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , então  $B(\omega, t_i) - B(\omega, t_{i-1})$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  são independentes.

O movimento Browniano fracionário (fBm) é uma generalização do movimento Browniano. Diferentemente do movimento Browniano, os incrementos do fBm não precisam ser independentes. Seja  $H$  o expoente de Hurst, tal que  $0 < H < 1$ , e seja  $b_0$  um número real arbitrário; o movimento Browniano fracionário  $B_H(\omega, t)$  para  $t > 0$  é definido como (Mandelbrot e van Ness, 1968)

$$B_H(\omega, 0) = b_0, \quad (2.35)$$

$$B_H(\omega, t) - B_H(\omega, 0) = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}] dB(\omega, s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(\omega, s) \right\}, \quad (2.36)$$

onde  $\Gamma$  é a função gama.

A integração da equação (2.33) deve ser realizada pontualmente utilizando os métodos usuais para integração por partes. Note que se  $b_0 = 0$ ,  $B_{1/2}(\omega, t) = B(\omega, t)$ . Tem-se que o

movimento Browniano não possui memória de longo prazo, ou seja, não exhibe o fenômeno de Hurst, pois  $H = 1/2$ .

Sabe-se há muito tempo que as leis de potência da função de estrutura são relacionadas com o fenômeno de Hurst. Para  $H = 1/3$ , a função de estrutura do fBm de ordem  $n$  exhibe uma lei de potência com um expoente  $nH/3$ , o mesmo valor previsto pela teoria de Kolmogorov (Kolmogorov, 1941) para a faixa inercial. No entanto, neste trabalho estamos preocupados com os efeitos de mais larga escala associados à cauda da função de autocorrelação e de estrutura. Desta forma é necessário enfatizar que estudos que utilizam o fBm em turbulência, como por exemplo em Vergassola et al. (1993) e Katul et al. (2001), possuem enfoques diferentes do presente trabalho. Note também que  $H = 1/3$  representa anti-persistência, e neste trabalho será mostrado que os dados de turbulência possuem  $H > 1/2$ .

O fBm é não estacionário, e desta forma não possui nem função de autocorrelação e nem espectro. O fBm só possui função de estrutura pois é um processo com incrementos estacionários. Para a derivação da equação de Lumley–Panofsky (2.18) e para o desenvolvimento do método MFA, o qual será proposto neste trabalho no Capítulo 4 (equação 4.9), é necessária a existência da função de autocorrelação, o que não é verdade para o fBm. Desta forma, vemos que para o propósito deste trabalho o modelo fBm não é adequado.

Suavizando o movimento Browniano fracionário e o derivando obtemos o ruído Gaussiano fracionário suavizado (smfGn) (Mandelbrot e van Ness, 1968; Mandelbrot e Wallis, 1969a,b; Mandelbrot, 1971). O smfGn é um processo auto-similar que exhibe o fenômeno de Hurst e possui as funções de autocorrelação e de estrutura (Mandelbrot e van Ness, 1968), no entanto ele também não é um bom modelo para a turbulência atmosférica. Para  $1/2 < H < 1$ , o smfGn possui memória de longo prazo e a escala integral  $\mathcal{T}$  do processo é infinita, e para  $0 < H < 1/2$ , o smfGn é anti-persistente com  $\mathcal{T} = 0$  (Mandelbrot e van Ness, 1968). Por outro lado, o comportamento do espectro do smfGn é  $f^{1-2H}$ , sendo  $f$  a frequência. Para  $1/2 < H < 1$ , o espectro decai com  $f$ , mas nunca com um expoente menor que  $-1$ , enquanto que para  $0 < H < 1/2$ , o espectro cresce com  $f$ . Consequentemente, a lei de potência proposta por Kolmogorov (Kolmogorov, 1941) para a faixa inercial  $f^{-5/3}$  não corresponde a nenhum  $H$  entre 0 e 1 no smfGn. Isto faz com que o smfGn também não seja um bom modelo para a turbulência atmosférica estacionária. No Capítulo 6, na Seção 6.1, será mostrado os resultados referentes à estimativa do expoente de Hurst utilizando séries de smfGn.



## 3 Revisão Bibliográfica

[Hurst \(1951\)](#) detectou a presença de memória de longo prazo em séries hidrológicas e geofísicas, com destaque para a série de vazões do Rio Nilo. Este comportamento ficou conhecido como fenômeno de Hurst, e é quantificado pelo expoente de Hurst  $H$ . Conforme já comentado no Capítulo 2, a descoberta de [Sutton \(1932\)](#) antecede em quase 20 anos o trabalho de [Hurst \(1951\)](#). [Sutton \(1932\)](#) detectou o “fenômeno de Hurst” em modelos de difusão atmosférica. Os resultados obtidos por ele mostram que seus dados possuem memória de longo prazo, pois foram encontrados os seguintes valores para  $H$ :  $H = 0,875$  e  $H = 1$ .

Neste capítulo iremos apresentar uma breve revisão de trabalhos que identificaram o fenômeno de Hurst em séries hidrológicas e geofísicas. Posteriormente, será apresentada uma revisão dos trabalhos que verificaram o fenômeno de Hurst em turbulência.

### 3.1 Estimativas do expoente de Hurst em séries hidrológicas e geofísicas

[Mandelbrot e Wallis \(1969d\)](#) analisaram o fenômeno de Hurst utilizando o intervalo ajustado em três categorias de dados: (i) registros hidrológicos de vazão, precipitação e temperatura, sendo que para esta categoria os registros mais longos são as séries mínimas e máximas anuais do Rio Nilo, (ii) registros de fósseis, como anéis de árvores, e (iii) outros registros diversos, como frequência de terremotos e direções de meandros do rio.

Os resultados encontrados por [Mandelbrot e Wallis \(1969d\)](#) para vários registros hidrológicos e geofísicos estão apresentados em uma tabela (ver Tabela 1, [Mandelbrot e Wallis, 1969d](#)). Neste trabalho apresentaremos somente alguns dos resultados encontrados por eles, e estes podem ser vistos na Tabela 3.1. Estes resultados mostram que registros hidrológicos e geofísicos apresentam o fenômeno de Hurst.

[Burlando et al. \(1996\)](#) analisaram o expoente de Hurst utilizando o intervalo ajustado e o método da variância agregada em séries hidrológicas. As séries estudadas foram: (i) série mensal de chuva contendo 1104 observações, medições realizadas entre 1888 e 1979, (ii) série mínima diária de temperatura com 12783 observações, medições realizadas entre 1988 até 1979, e (iii) série diária de vazão contendo 18748 observações, medições realizadas entre 1943

Tabela 3.1: Valores de  $H$  encontrados por [Mandelbrot e Wallis \(1969d\)](#) para registros hidrológicos e geofísicos.

Série de dados	Valores de $H$
Vazão máxima anual do Rio Nilo (622-1669)	0,84
Vazão mínima anual do Rio Nilo (622-1669)	0,91
Precipitação anual de Baltimore (1817-1962)	0,75
Precipitação anual de São Francisco (1850-1963)	0,64
Frequências semanais de terremotos em Derby (1962-1967)	0,93
Azimute dos meandros do Rio Moorabool	0,73
Anéis de árvores - Bacia do Rio Missouri (978-1950)	0,63

Tabela 3.2: Valores de  $H$  encontrados por [Burlando et al. \(1996\)](#) para séries hidrológicas e geofísicas.

Método	Série mensal de chuva	Série mínima diária de temperatura	Série diária de vazão
R/S	0,59	0,77	0,88
Variância agregada	0,53	0,70	0,75

e 1994. As séries (i) e (ii) foram medidas no observatório Ximeniano localizado na cidade de Florença, Itália e a série (iii) foi medida no Lago Maggiore localizado na Itália. Os resultados encontrados por [Burlando et al. \(1996\)](#) estão apresentados na Tabela 3.2.

[Burlando et al. \(1996\)](#) comentam que as estimativas de  $H$  para a série mensal de chuva são muito próximas de  $1/2$ , e que, portanto, esta série de dados não apresenta memória de longo prazo. Para as outras duas séries os valores de  $H$  são maiores que  $1/2$ , desta forma, temos a série mínima diária de temperatura e a série diária de vazão apresentam o fenômeno de Hurst.

[Montanari et al. \(1997\)](#) analisaram o fenômeno de Hurst nas seguintes séries de dados: (i) série diária de vazão afluente ao Lago Maggiore, Itália contendo 18748 observações, medições realizadas entre 1943 e 1994 e (ii) série mensal de chuva contendo 1776 observações, medições realizadas entre 1833 e 1980 na estação da Universidade de Genova na Itália. O expoente de Hurst foi estimado com o intervalo ajustado, o método da variância agregada e o método da variância diferenciada.

Primeiramente, [Montanari et al. \(1997\)](#) estimaram o valor do expoente de Hurst para a série diária de vazão dessazonalizada. Posteriormente, com o objetivo de verificar se a não-gaussianidade interfere nas análises do expoente  $H$ , extraiu-se o logaritmo da série original e o expoente de Hurst foi calculado com base na série ajustada. Por fim, eles estimaram o

Tabela 3.3: Valores de  $H$  encontrados por [Montanari et al. \(1997\)](#) para séries de vazão do Lago Maggiore.

Método	Série diária	Série ajustada	Série mensal
R/S	0,81	0,81	0,69
Variância agregada	0,71	0,67	0,54
Variância diferenciada	0,74	0,78	0,60

expoente de Hurst para a série mensal de vazão. Os resultados para estas análises podem ser vistos na Tabela 3.3.

Os resultados encontrados por [Montanari et al. \(1997\)](#) sugerem que a série de vazão diária e a série ajustada possuem memória de longo prazo, pois apresentam valores de  $H > 1/2$ . Para a série mensal, os valores de  $H$  também são maiores que  $1/2$ , no entanto eles comentam que a série contém somente 614 observações, e que este pequeno tamanho da amostra gera grande incerteza na estimativa de  $H$ , e que devido a isto, não é possível concluir se os dados exibem ou não o fenômeno de Hurst. [Montanari et al. \(1997\)](#) comentam que incluíram esta análise a fim de ressaltar alguns problemas encontrados na estimativa do expoente de Hurst.

Analisando os resultados das Tabelas 3.2 e 3.3 é possível verificar que, para ambos os trabalhos, as estimativas de  $H$  são diferentes para o intervalo ajustado e para a variância agregada, e que os expoentes de Hurst do intervalo ajustado são maiores que os do método da variância agregada, resultado que também acontece para os dados de turbulência analisados neste trabalho.

## 3.2 Estimativas do expoente de Hurst em turbulência

[Laushey \(1951\)](#) analisou registros de 1 minuto de flutuações de velocidade longitudinal e transversal da água, sendo que não foram especificados os equipamentos utilizados e nem a configuração do canal. Os dados foram digitalizados a uma taxa de 5 pontos por segundo, totalizando 300 pontos de dados. [Laushey \(1951\)](#) estimou o expoente de Hurst utilizando o intervalo ajustado para: (1) 10 grupos contendo 30 pontos, (2) 5 grupos contendo 60 pontos, (3) 2 grupos contendo 150 pontos e (4) 1 grupo contendo 300 pontos. O resultado encontrado para o expoente de Hurst para estas quatro combinações está apresentado na Tabela 3.4. Temos que  $H_{\text{long}}$  e  $H_{\text{trans}}$  representam o expoente de Hurst, respectivamente, para a velocidade longitudinal e transversal. Estes valores para  $H$  mostram que as séries analisadas apresentam o fenômeno de Hurst.

[Nordin et al. \(1972\)](#) detectaram o fenômeno de Hurst em séries turbulentas de velocidade medidas nos Rios Missouri e Missisipi e em experimentos realizados em canais de laboratório,

Tabela 3.4: Valores de  $H$  encontrados por [Laushey \(1951\)](#) para séries de flutuações de velocidade longitudinal e transversal da água.

Dados	$H_{\text{long}}$	$H_{\text{trans}}$
1	$0,666 \pm 0,088$	$0,681 \pm 0,052$
2	$0,628 \pm 0,088$	$0,663 \pm 0,079$
3	$0,629 \pm 0,105$	$0,657 \pm 0,030$
4	$0,664 \pm 0,000$	$0,648 \pm 0,000$
Média	0,647	0,662

Tabela 3.5: Valores de  $H$  encontrados por [Nordin et al. \(1972\)](#) para séries de flutuações turbulentas de velocidade medidos em experimentos de laboratório e em rios.

Dados	Profundidade (m)	Velocidade média ( $\text{ms}^{-1}$ )	$H$
Canal (i)	0,014	0,454	0,60
Canal (ii)	0,284	0,259	0,84
Rio Missouri	3,444	1,353	0,93
Rio Mississippi	10,67	1,301	0,95

sendo que uma ampla variedade de canais e condições de escoamento foram analisadas. O expoente de Hurst foi estimado utilizando o intervalo ajustado R/S.

[Nordin et al. \(1972\)](#) encontraram que a maioria dos experimentos realizados no laboratório exibem o fenômeno de Hurst, porém somente dois resultados foram reportados no artigo: (i) para um canal com largura de 20,23 cm e comprimento de 9,14 m foi encontrado um valor de  $H = 0,60$  e (ii) para um canal com largura de 1,21 m e comprimento de 36,58 m foi encontrado um valor de  $H = 0,84$ . Segundo eles, estes resultados são representativos de todos os experimentos realizados. Para os dados de velocidade medidos nos Rios Missouri e Mississippi, os valores encontrados para  $H$  são, respectivamente,  $H = 0,93$  e  $H = 0,95$ . Estes resultados, juntamente com algumas características dos ambientes de estudo, podem ser vistos na Tabela 3.5

Os resultados encontrados por [Nordin et al. \(1972\)](#), utilizando o intervalo ajustado, mostram que todas as séries analisadas nesse trabalho, independentemente se foram medidas em laboratórios ou na natureza, exibem o fenômeno de Hurst, ou seja, apresentam memória de longo prazo e conseqüentemente suas escalas integrais não existem. Segundo [Nordin et al. \(1972\)](#), até o trabalho deles, com exceção de um breve comentário de [Laushey \(1951\)](#) em sua discussão sobre o trabalho de [Hurst \(1951\)](#), todas as evidências empíricas consistiram em séries temporais dominadas por componentes de baixa frequência, e ninguém havia con-

siderado memória de longo prazo em dados de turbulência do ponto de vista do intervalo ajustado.

Nordin et al. (1972) também apontam, além do trabalho de Laushey (1951), outras três evidências da existência do fenômeno de Hurst em turbulência. A primeira evidência são os comentários de Taylor (1935) sobre o trabalho de Sutton (1932) em turbulência atmosférica, no qual foi verificado que a função de correlação  $\varrho(\eta)$  varia com  $\eta^{-q}$ , onde  $q$  é uma constante, sendo que esta forma para a função de correlação é característica do ruído Gaussiano fracionário. Taylor (1935) também comentou que a teoria de difusão de Sutton, a qual deveria ser aplicada somente quando a escala integral é finita, estava sendo aplicada em problemas de turbulência atmosférica, para os quais não havia razão, *a priori*, para supor a existência da escala integral da turbulência.

A segunda, uma evidência indireta do fenômeno de Hurst em turbulência atmosférica, é verificada em observações de distribuições de concentração de um ponto estacionário ou de fontes em linha em uma atmosfera neutra. Monin e Yaglom (1971), discutindo dados de campo referentes a difusão atmosférica, notaram que a concentração decresce com a distância a uma taxa mais rápida do que a prevista pela teoria, o que também ocorre para um processo de ruído Gaussiano fracionário quando  $1/2 < H < 1$ .

Por fim, algumas estatísticas Lagrangeanas foram obtidas para um experimento com pequenas partículas de plástico flutuando em uma superfície de água com fluxo uniforme em um canal de 2,13 m de largura. Este experimento está descrito em Hansen (1971), o qual forneceu alguns de seus dados não publicados sobre a variância do deslocamento das partículas. Nordin et al. (1972) mostram em uma figura que a variância cresce com  $\Delta^{1,4}$ , sugerindo um expoente de Hurst de 0,7.

Os próximos a identificarem o fenômeno de Hurst em turbulência foram Helland e Van Atta (1978). Eles detectaram o fenômeno em dados de turbulência de grade utilizando o intervalo ajustado R/S. As séries analisadas foram geradas em um túnel de vento de circuito fechado com seção de teste de 76 cm  $\times$  76 cm  $\times$  10 m e as variáveis medidas foram: flutuações turbulentas de  $u$  e  $v$  e a velocidade média  $U$ . Foram utilizadas barras cilíndricas (0,477 cm de diâmetro) e uma grade biplanar de malha quadrada (tamanho da malha  $M = 2,54$  cm). O túnel foi operado com uma velocidade média de 15,7 ms<sup>-1</sup>, o que gerou um número de Reynolds de 27.000.

Helland e Van Atta (1978) verificaram que existem variações no comportamento do intervalo ajustado R/S para as flutuações turbulentas  $u$  e  $v$ . Para ambos os casos foi verificado que para  $\Delta$  pequeno o expoente de Hurst vale aproximadamente 1. Para  $\Delta$ 's intermediários o expoente de Hurst vale  $H = 0,5$  para  $u$  e  $H = 0,57$  para  $v$ . Após aproximadamente uma década em  $\Delta$  o expoente de  $u$  muda para  $H = 0,78$  e após cerca de meia década o expoente de  $v$  muda para  $H = 0,68$ .

Tabela 3.6: Valores de  $H$  encontrados por [Helland e Van Atta \(1978\)](#) para séries geradas em um túnel de vento.

Dados	Intervalos (s)	Valores de $H$
$u$ (com grade)	$10^{-5} < \Delta < 10^{-2}$	0,99
	$7 \times 10^{-2} < \Delta < 3$	0,50
	$3 < \Delta < 10^2$	0,78
$v$ (com grade)	$10^{-5} < \Delta < 3 \times 10^{-3}$	0,99
	$10^{-2} < \Delta < 1$	0,57
	$1 < \Delta < 10^2$	0,68
$u$ (sem grade)	$10^{-3} < \Delta < 10^2$	0,95
$v$ (sem grade)	$10^{-3} < \Delta < 10^2$	0,93

A fim de verificar estas “quebras” no comportamento do intervalo ajustado, [Helland e Van Atta \(1978\)](#) também realizaram medições das séries de flutuações de  $u$  e  $v$  com a mesma configuração que anteriormente, porém removendo a grade. Para estes casos a inclinação do R/S é quase constante e vale:  $H = 0,95$  para  $u$  e  $H = 0,93$  para  $v$ . Os resultados obtidos para o expoente de Hurst, juntamente com o intervalo de ajuste, podem ser vistos na Tabela 3.6.

## 4 Resultados teóricos

Neste capítulo iremos apresentar os resultados teóricos desenvolvidos neste trabalho. Estudos anteriores ([Crivellaro et al., 2013](#); [Crivellaro, 2014](#)) mostraram que o expoente da lei de potência de flutuações turbulentas para o erro médio quadrático no Método de Filtragem é diferente de  $-1$ , e que isto acontece devido ao fenômeno de Hurst em turbulência. Levando em consideração essas questões, nesta seção iremos mostrar que a equação para o erro médio quadrático de  $\tilde{x}_\Delta$ , proposta por [Lumley e Panofsky \(1964\)](#), pode ser adaptada de modo que a escala integral não precisa ser finita, e que, permitindo que o expoente  $p$  da equação (2.19) varie livremente, o Método de Filtragem pode ser ajustado e continuar fornecendo estimativas de erro confiáveis, mesmo para os casos que exibem o fenômeno de Hurst e consequentemente para os quais a escala integral não existe. Esta nova abordagem para estimativas de erros também possibilita a estimativa do expoente de Hurst  $H$ .

Usualmente, costuma-se supor que a relação entre o expoente de Hurst  $H$  e o expoente da lei de potência  $p$  do  $\text{MSE} = \Delta^{-p}$  (equação (2.19)) é:

$$p = 2 - 2H, \quad (4.1)$$

embora, estritamente, essa relação só seja válida para processos auto-similares ([Mandelbrot, 1965](#)). É importante observar esta equação não é a mesma que (2.21), pois  $p$  é a lei de potência do MSE e não o expoente de decaimento da função de autocorrelação.

É interessante observar que, embora a equação para o erro médio quadrático (2.19) tenha sido introduzida pela primeira vez em micrometeorologia por [Salesky et al. \(2012\)](#), o método já era conhecido em conexão com o fenômeno de Hurst (ver em [Beran, 1989](#)). [Taqqu et al. \(1995\)](#), [Burlando et al. \(1996\)](#), [Montanari et al. \(1997\)](#) e [Bisaglia e Guégan \(1998\)](#) utilizam esta formulação para a estimativa do expoente de Hurst nos campos de hidrologia, hidroclimatologia, finanças e para sequências de ruído Gaussiano fracionário e ARIMA fracionário e a chamam de método da variância agregada, o qual é formalmente idêntico à abordagem que será desenvolvida neste capítulo.

Para Lumley e Panofsky (1964) chegarem à aproximação (2.18)

$$\text{MSE}(\tilde{x}_\Delta) \approx \frac{2\mathcal{T}}{\Delta} \text{Var}\{x\}$$

foi necessário supor que a escala integral  $\mathcal{T}$  existe; no entanto esta suposição não é necessária para a equação (2.17),

$$\text{MSE}(\tilde{x}_\Delta) = \frac{2 \text{Var}\{x\}}{\Delta} \int_0^\Delta \left(1 - \frac{\eta}{\Delta}\right) \varrho(\eta) d\eta$$

a qual é exata. Desta forma, é interessante analisar o comportamento dessa equação de acordo com a forma com que a função de autocorrelação  $\varrho(\eta)$  decresce. Neste trabalho consideraremos que o decaimento de  $\varrho(\eta)$  é dado por uma lei de potência.

Para analisarmos o comportamento da equação (2.17), primeiramente definiremos uma escala temporal dada por  $\mathcal{T}_H$ , tal que

$$\eta > \mathcal{T}_H \Rightarrow |\varrho(\eta)| < \epsilon \quad (4.2)$$

para algum  $\epsilon$  arbitrariamente pequeno. Note que na prática, a escala  $\mathcal{T}_H$  não é tão diferente do primeiro cruzamento no eixo das abscissas, se  $\epsilon$  for interpretado como a incerteza da função de autocorrelação amostral  $\varrho(\eta)$  em torno de zero.

Seja  $\Delta \gg \mathcal{T}_H$ ; então a integral da equação (2.17) pode ser reescrita da seguinte forma

$$I = \underbrace{\int_0^{\mathcal{T}_H} \left(1 - \frac{\eta}{\Delta}\right) \varrho(\eta) d\eta}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathcal{T}_H}^\Delta \left(1 - \frac{\eta}{\Delta}\right) \varrho(\eta) d\eta}_{I_2}. \quad (4.3)$$

Na primeira integral, em (4.3) temos que  $\eta/\Delta \ll 1$ , e o resultado da integração é

$$I_1 \approx \int_0^{\mathcal{T}_H} \varrho(\eta) d\eta \equiv \alpha_1 \mathcal{T}_H. \quad (4.4)$$

Para analisarmos a segunda integral, adotaremos o comportamento para a cauda da função de autocorrelação proposto por Sutton (1932):

$$\varrho(\eta) = k \left( \frac{\eta}{\mathcal{T}_H} \right)^{-q}, \quad (4.5)$$

com  $q > 0$  e  $k$  adimensional. Substituindo (4.5) na segunda integral de (4.3), temos que

$$I_2 = k \int_{\mathcal{T}_H}^\Delta \left(1 - \frac{\eta}{\Delta}\right) \left( \frac{\eta}{\mathcal{T}_H} \right)^{-q} d\eta \quad (4.6)$$



Resolvendo esta integração, obtemos:

$$I_2 = \mathcal{T}_H \left\{ -\frac{k}{1-q} + \frac{k}{(1-q)(2-q)} \left( \frac{\Delta}{\mathcal{T}_H} \right)^{1-q} + \frac{k}{2-q} \frac{\mathcal{T}_H}{\Delta} \right\}. \quad (4.7)$$

Substituindo (4.4) e (4.7) em (4.3), obtemos o seguinte resultado para  $I$

$$I \approx I_1 + I_2 \approx \alpha \mathcal{T}_H + \beta \mathcal{T}_H \left( \frac{\Delta}{\mathcal{T}_H} \right)^{1-q} + \gamma \frac{\mathcal{T}_H^2}{\Delta}, \quad (4.8)$$

com  $\alpha = \alpha_1 - k/(1-q)$ ,  $\beta = k/((1-q)(2-q))$ ,  $\gamma = 2/(2-q)$ . Por fim, substituindo (4.8) em (2.17), obtemos a seguinte expressão para o MSE

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\tilde{x}_\Delta) &= \frac{2 \text{Var}\{x\}}{\Delta} \left[ \alpha \mathcal{T}_H + \beta \mathcal{T}_H \left( \frac{\Delta}{\mathcal{T}_H} \right)^{1-q} + \gamma \frac{\mathcal{T}_H^2}{\Delta} \right], \\ &= 2 \left[ \alpha \frac{\mathcal{T}_H}{\Delta} + \beta \left( \frac{\mathcal{T}_H}{\Delta} \right)^q + \gamma \left( \frac{\mathcal{T}_H}{\Delta} \right)^2 \right] \text{Var}\{x\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A equação (4.9) pode ser considerada uma generalização da equação de Lumley-Panofsky. O comportamento desta equação varia de acordo com os valores de  $q$ . Temos os seguintes casos (relembrando que  $H = 1 - q/2$  (equação (2.21)):

$0 < q < 1$ : Este é o caso mais encontrado com relação ao fenômeno de Hurst. Para este intervalo de  $q$ , os termos da equação (4.9) em  $\alpha$  e em  $\gamma$  decaem mais rapidamente que o termo em  $\beta$ , e a lei de potência resultante é  $\text{MSE} \sim \Delta^{-q}$ . Desta forma temos que  $p = q$ , e o intervalo do expoente de Hurst é  $1/2 < H < 1$ .

$q = 1$ : Para este valor de  $q$  a equação (4.7) não pode ser aplicada. Alternativamente, podemos fixar  $q = 1$  em (4.6) e o resultado da integração é

$$\text{MSE}(\tilde{x}_\Delta) \sim \left( \frac{\mathcal{T}_H}{\Delta} \right) \ln \left( \frac{\Delta}{\mathcal{T}_H} \right).$$

Este caso tende a ser interpretado graficamente como  $q < 1$ , uma vez que o comportamento de  $\Delta^{-1} \ln(\Delta)$  aparece como um decaimento extremamente lento para  $\Delta^{-1}$ , como mostra a Figura 4.1. Neste caso nenhuma relação parece existir entre  $q$  e  $p$  (ou  $H$ ).

$q > 1$ : Para estes valores de  $q$  os termos em  $\gamma$  e  $\beta$  serão assintoticamente negligenciáveis em comparação com o termo em  $\alpha$  para  $\Delta \gg \mathcal{T}_H$ . Este é um caso em que  $\rho(\eta)$  tem um decaimento muito rápido: desta forma a escala integral existe e a equação de Lumley-Panofsky (2.18) é recuperada ( $\text{MSE} \sim \Delta^{-1}$ ). Em outras palavras, sempre que  $q > 1$

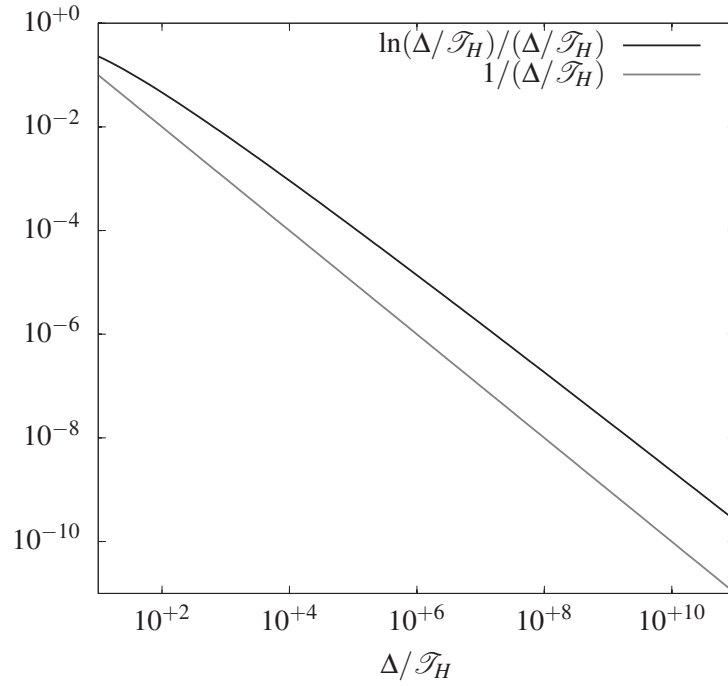


Figura 4.1: Identificação da lei de potência de  $\text{MSE}(\tilde{x}_\Delta) \sim (\mathcal{T}_H/\Delta) \ln(\Delta/\mathcal{T}_H)$ , resultado para o caso em que  $q = 1$ .

teremos  $p = 1$  e conseqüentemente  $H = 1/2$ , o que significa ausência do fenômeno de Hurst.

Conforme verificado nos casos descritos nos itens acima, temos que  $0 < H < 1/2$  não pode ser previsto supondo  $\eta^{-q}$  como o comportamento para a lei de potência da função de autocorrelação. Estes casos são conhecidos na literatura como anti-persistência ([Mansukhani, 2012](#)).

Finalmente, para  $\Delta$ 's grandes e o expoente de Hurst variando entre  $1/2 < H < 1$ , o MSE pode ser aproximado por:

$$\text{MSE}(\tilde{x}_\Delta) \approx 2\beta \text{Var}\{x\} \left( \frac{\mathcal{T}_H}{\Delta} \right)^{-p}. \quad (4.10)$$

Este método será referenciado no decorrer do trabalho como MFA e a estimativa do expoente de Hurst será chamado de  $H_p$ .

## 5 Campanhas micrometeorológicas, controle de qualidade e processamento inicial dos dados

Esta seção será dividida em três subseções: descrição das campanhas micrometeorológicas que forneceram os dados utilizados neste trabalho, controle de qualidade dos dados e processamento inicial dos dados.

### 5.1 Campanhas Micrometeorológicas

Os dados utilizados neste trabalho são provenientes de quatro campanhas micrometeorológicas. A primeira campanha micrometeorológica foi realizada em uma grameira localizada em Tijucas do Sul, Paraná, Brasil (latitude  $25^{\circ}50'07,12''$  S, longitude  $49^{\circ}07'47,77''$  O e altitude 940 m) no período de 16/02/2011 a 27/02/2011. Os dados foram medidos a 1,85 m do solo e a aquisição dos mesmos foi realizada a 20 Hz.

A segunda campanha micrometeorológica foi realizada em uma pequena ilha localizada no lago do reservatório de Itaipu nas proximidades da cidade de Missal, Paraná. As coordenadas geográficas da ilha são latitude  $- 25^{\circ}03'25,72''$  e longitude  $- 54^{\circ}24'33,67''$ , e a altitude em relação ao mar é de 220 m (Dias et al., 2013). Esta campanha foi realizada no período de Dezembro de 2012 até Janeiro de 2014, porém neste trabalho só foram utilizados os dados entre 24/08/2013 e 04/09/2013. Durante este período a base da torre meteorológica estava muito próxima do nível da água (nunca superior a 1 m) e a porção de terra, em qualquer direção na ilha era desprezível (nunca maior que 10 m). Desta forma, as medições foram realizadas em uma superfície homogênea. A aquisição dos dados foi realizada a 20 Hz e a altura de medição foi 3,76 m acima da base da torre.

Uma descrição mais detalhada destas duas campanhas micrometeorológicas (as quais foram realizadas pelo Lemma (Laboratório de Estudos em Monitoramento e Modelagem Ambiental)) pode ser encontrada em Crivellaro (2014) e em Crivellaro (2011).

A terceira campanha micrometeorológica foi realizada na cidade de Kettleman, Califór-

nia, Estados Unidos, como parte do projeto AHATS (*Advection Horizontal Array Turbulence Study*) (UCAR/NCAR–Earth Observing Laboratory, 1990). Os dados foram coletados em diferentes alturas em relação ao solo no período de 09/06/2008 a 16/08/2008, a uma frequência de aquisição de 60 Hz. Neste trabalho analisamos os dados referentes à maior altura de medição (8 m) dos seguintes períodos: 02/07/2008 a 17/07/2008 e 05/08/2008 a 15/08/2008. Para as análises deste trabalho os dados foram reamostrados para uma frequência de 20 Hz.

Por fim a quarta campanha micrometeorológica foi realizada em uma grande e plana plantação de milho perto da cidade de Mahomet, Illinois, Estados Unidos. As medições foram em diferentes alturas em relação ao solo, no entanto neste trabalho somente serão utilizados os dados referentes à altura de 3,5m (maior altura de medição desta campanha). A campanha foi realizada no verão do hemisfério norte, e em 10/07/2011, entre 09:30 e 17:00, hora local, a velocidade do vento apresentou comportamento aproximadamente estacionário (Chamecki, 2013). Devido a este comportamento da série de velocidade do vento, neste trabalho analisaremos tanto a série de dados completa contendo 7 horas e 30 minutos, como blocos da série completa.

Os dados provenientes destas campanhas que serão analisados neste trabalho são: velocidade do vento nas três direções medida por um anemômetro sônico CSAT3 da *Campbell Scientific* ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) e (a) temperatura sônica medida pelo CSAT3 ( $\theta_v$ ) (campanha de Mahomet e AHATS) e (b) temperatura do ar medida por um termopar de fio fino FWTC-3 ( $\theta$ ) da *Campbell Scientific*, o qual estava acoplado ao centro do CSAT3 (campanha de Tijucas do Sul e Missal).

## 5.2 Controle de qualidade

Nesta seção será descrito o controle de qualidade aplicado aos dados de velocidade do vento e temperatura. O controle de qualidade utilizado neste trabalho foi proposto a fim de eliminar falhas nos sensores, valores fora dos padrões, não-estacionariedade nos dados, etc.. Para isto usamos a abordagem proposta por Zahn et al. (2016) com o auxílio da biblioteca de *Python* chamada *Pymicra*<sup>1</sup>. Os procedimentos de controle de qualidade dos dados descritos em Zahn et al. (2016) e utilizados neste trabalho incluem: análise de *spikes*, teste da diferença máxima, análise do desvio-padrão e o *reverse arrangement test* (RAT) (Bendat e Piersol, 2010). Os parâmetros de controle de qualidade utilizados estão descritos na Tabela 5.1.

O teste da diferença máxima, o RAT e a remoção da tendência linear eliminam blocos quando a média muda significativamente. Um teste adicional, o qual não está descrito em Zahn et al. (2016), foi aplicado a fim de analisar a mudança da variância dada uma certa

---

<sup>1</sup><https://github.com/tomchor/pymicra>.

Tabela 5.1: Parâmetros utilizados para o controle de qualidade dos dados

Variável	Limite sup.	Limite inf.	Limite desvio-padrão	Limite da diferença máxima
$u$	—	—	$0,03 \text{ m s}^{-1}$	$2,0 \text{ m s}^{-1}$
$v$	—	—	$0,03 \text{ m s}^{-1}$	$4,0 \text{ m s}^{-1}$
$w$	—	—	$0,01 \text{ m s}^{-1}$	$1,0 \text{ m s}^{-1}$
$\theta$	$50^\circ\text{C}$	$0^\circ\text{C}$	$0.1^\circ\text{C}^\dagger$	$2.0^\circ\text{C}$

$^\dagger 0.01^\circ\text{C}$  para os dados de Itaipu e Mahomet.

janela de dados. Considere um bloco de dados contendo 30 minutos medidos a 20 Hz, assim temos  $N = 36000$  e os dados  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ . A média e a variância para uma janela de tamanho  $D$  são definidas como:

$$\tilde{x}_D(k) = \frac{1}{D} \sum_{i=k}^{k+D-1} x_i, \quad (5.1)$$

$$\widetilde{\text{Var}}_D(k) = \frac{1}{D} \sum_{i=k}^{k+D-1} (x_i - \tilde{x}_D(k))^2. \quad (5.2)$$

Calculou-se a razão entre o maior e o menor valor de  $\widetilde{\text{Var}}_D(k)$  para todos os  $k$ 's, e os blocos foram rejeitados quando esta razão foi maior que  $r$ . Os parâmetros  $r$  e  $D$  utilizados neste procedimento estão descritos na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Parâmetros  $D$  e  $r$  utilizados para o controle de qualidade dos dados.

Variável	$D$ (s)	$r$
$u$ e $v$	240	5
$w$	120	3
$\theta$	120	4

Estes procedimentos eliminam efetivamente todos os blocos com forte evidência de não-estacionariedade para os momentos de primeira, segunda e terceira ordem. A Tabela 5.3 apresenta o número de blocos restantes após os procedimentos de controle de qualidade dos dados para as campanhas de Tijucas do Sul, Missal e AHATS. Para a campanha de Mahomet, o controle de qualidade foi realizado na série completa de 7 horas e 30 minutos. As séries de velocidade do vento passaram por todos os controles de qualidade, enquanto que a série de temperatura foi rejeitada na análise da variância. Desta forma, para Mahomet analisaremos somente as séries de velocidade do vento  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

Tabela 5.3: Número de blocos de 30 minutos após o controle de qualidade.

Campanha micrometeorológica	n° de blocos após o controle de qualidade
Tijucas do Sul	68
Missal	98
AHATS	130

## 5.3 Processamento inicial dos dados

Nesta seção descreveremos o procedimento inicial realizado com os dados que passaram pelo controle de qualidade descrito na seção anterior. Esta seção será dividida em duas sub-seções: processamento inicial dos dados de Tijucas do Sul, Missal e AHATS e processamento inicial dos dados de Mahomet.

### 5.3.1 Processamento inicial dos dados de Tijucas do Sul, Missal e AHATS

O processamento inicial padrão para todos os dados das campanhas de Tijucas do Sul, Missal e AHATS inclui: rotação de coordenadas 2D e remoção da tendência linear para obtenção das flutuações turbulentas de primeira ordem.

O processo de remoção da tendência linear (*linear detrending*) (Lee et al., 2005; Aubinet et al., 2012) consiste em realizar uma regressão linear com a série de dados (método dos mínimos quadrados) e a partir da reta obtida extrair as flutuações turbulentas.

A Figura 5.1 mostra a reta obtida para a remoção da tendência linear para duas séries de dados de 30 minutos:  $u$  medido na campanha de Missal em 24/08/2013 entre 1720h e 1750h, e  $\theta$  medido na campanha de Tijucas do Sul em 22/02/2011 entre 1050h e 1120h. Analisando os gráficos é possível verificar que a série de dados de  $\theta$  apresenta uma tendência linear muito maior que a série de dados de  $u$ .

Os dados brutos utilizados neste trabalho são referentes aos dados em que se aplicou somente o procedimento de rotação de coordenadas. As flutuações turbulentas de primeira ordem ( $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  e  $\theta'$ ) são provenientes diretamente das medições realizadas por instrumentos de turbulência após a rotação de coordenadas e a remoção da tendência linear. As flutuações de segunda e terceira ordem são obtidas a partir do produto das flutuações de primeira ordem. As flutuações turbulentas que foram analisadas neste trabalho estão apresentadas na Tabela 5.4.

Os principais estimadores utilizados neste trabalho para o cálculo de  $H$  foram o MFA ( $H_p$ ) – equações (2.19) e (4.1), e o R/S ( $H_R$ ) – equação (2.25). A lei de potência do MSE, equação (2.19), não vale para todos os valores de  $\Delta$ . Analisando o comportamento do MSE, foi observado que para os dados de primeira ordem existem duas leis de potência distintas

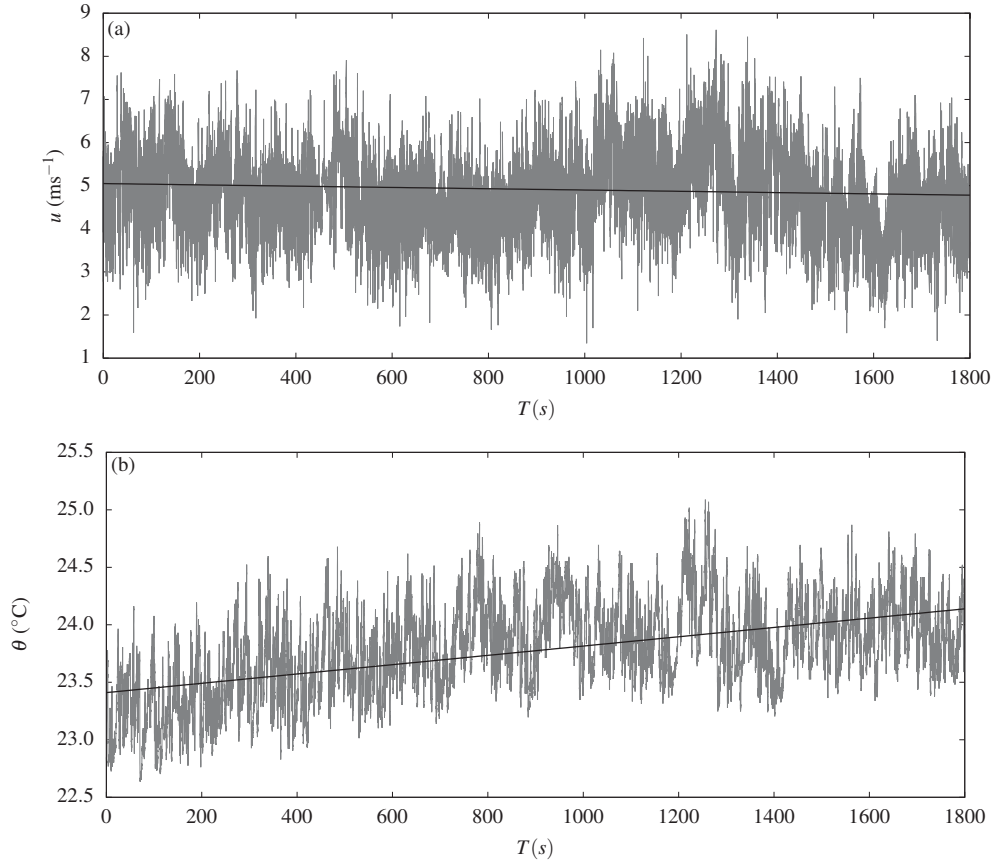


Figura 5.1: Reta obtida para remoção da tendência linear em duas séries de dados (a)  $u$  medido em Missal em 24/08/2013 entre 1720h e 1750h e (b)  $\theta$  medido em Tijucas do Sul em 22/02/2011 entre 1050h e 1120h.

para diferentes intervalos de  $\Delta$ , e que para todos os casos analisados neste trabalho, para  $\Delta$  próximo de  $T$ , há uma queda no comportamento do MSE devido ao  $T$  limitado a 30 minutos. Devido a estas questões, para realizar o ajuste aos dados do  $\text{MSE}(\tilde{x}_{\Delta})$  e encontrar a lei de potência prevista pela equação (2.19) é necessário delimitar um intervalo em  $\Delta$ . É importante lembrar que nas análises realizadas por Salesky et al. (2012) o expoente foi fixado em  $p = 1$  e que em nossas análises o expoente  $p$  pode variar livremente e será ajustado para cada bloco analisado. Esta flexibilidade no ajuste de  $p$  também permite que o expoente de Hurst ( $H_p$ ) seja estimado (ver equação 4.1).

Para realizar os ajustes no MSE, Salesky et al. (2012) usaram os seguintes intervalos  $[\Delta_{\min}, \Delta_{\max}]$ : (i)  $[2\mathcal{T}, T/4]$  para os dados de primeira ordem, e (ii)  $[2\mathcal{T}, T/10]$  para os dados de segunda ordem. Em Salesky et al. (2012),  $T$  é o período de análise e a escala integral  $\mathcal{T}$  é calculada integrando numericamente a função de autocorrelação até o primeiro cruzamento no eixo das abscissas. Este procedimento para o cálculo da escala integral pode adicionar incertezas a estes intervalos, pois às vezes o primeiro cruzamento no eixo das abscissas pode estar defasado devido à variabilidade amostral da função de autocorrelação. A fim de reduzir

Tabela 5.4: Flutuações turbulentas de primeira, segunda e terceira ordem analisadas neste trabalho.

	Flutuações turbulentas
Primeira ordem	$u', v', w' \text{ e } \theta'$
Segunda ordem	$w'u', w'\theta', u'u', v'v', w'w' \text{ e } \theta'\theta'$
Terceira ordem	$w'u'u', w'v'v', w'\theta\theta', w'w'u', w'w'\theta'$
	$u'u'u', v'v'v', w'w'w', \theta'\theta'\theta' \text{ e } w'(u'u' + v'v' + w'w')/2$

estas incertezas, iremos utilizar a escala temporal  $\mathcal{T}_H$ , previamente definida em (4.2), para delimitar os intervalos de ajuste para todas as variáveis que serão analisadas neste trabalho. Para  $\epsilon$ , adotaremos um desvio-padrão do estimador da função de autocorrelação amostral, sendo que a variância da função de autocorrelação amostral foi calculada a partir da equação de Bartlett (Box et al., 1994, Eq. 2.1.13):

$$\text{Var}\{\hat{\varrho}(k\Delta t)\} \approx \frac{1}{N} \left( 1 + 2 \sum_{v=1}^q \varrho(v\Delta t)^2 \right), \quad k > q. \quad (5.3)$$

Por tentativa e erro, o valor de  $q$  na equação (5.3) foi fixado em 6000 pontos, o que representa um tempo de 5 minutos, com a observação de que a variância do lado esquerdo não cresce significativamente, para nenhuma variável estudada neste trabalho, depois deste período.

A Figura 5.2 mostra exemplos da função de autocorrelação original (linha preta) e da função de autocorrelação subtraindo  $\epsilon$  (linha cinza) para as flutuações turbulentas de primeira ordem de Tijucas do Sul medidas em 17/02/2011 entre 14:20h e 14:50h. O primeiro cruzamento da linha preta no eixo das abcissas é o conhecido *first-zero crossing*, utilizado como limite superior para calcular a escala integral  $\mathcal{T}$ . Já o primeiro cruzamento da linha cinza é a escala temporal  $\mathcal{T}_H$  (sinalizada nos gráficos) definida previamente neste trabalho.

Para encontrarmos o intervalo de ajuste da lei de potência do MSE, plotamos para cada variável todas as análises de MSE normalizadas pelas respectivas variâncias das séries de dados *versus* o  $\Delta$  normalizado por  $\mathcal{T}_H$ . Este procedimento foi realizado com todas as variáveis de todas as campanhas para a definição do intervalo de ajuste. Exemplos deste procedimento são apresentados na Figura 5.3: (a), (b) e (c)  $u'$ , (d), (e) e (f)  $w'u'$ , e (g), (h) e (i)  $w'w'\theta'$ , respectivamente para Tijucas do Sul, Missal e AHATS. A partir da análise destes gráficos definiram-se os intervalos de ajuste.

Os intervalos definidos para realizar o ajuste e encontrar a lei de potência prevista pela equação (2.19) estão apresentados nas Tabelas 5.5, 5.6 e 5.7, respectivamente, para as flutuações turbulentas de primeira, segunda e terceira ordem. Note que os intervalos foram



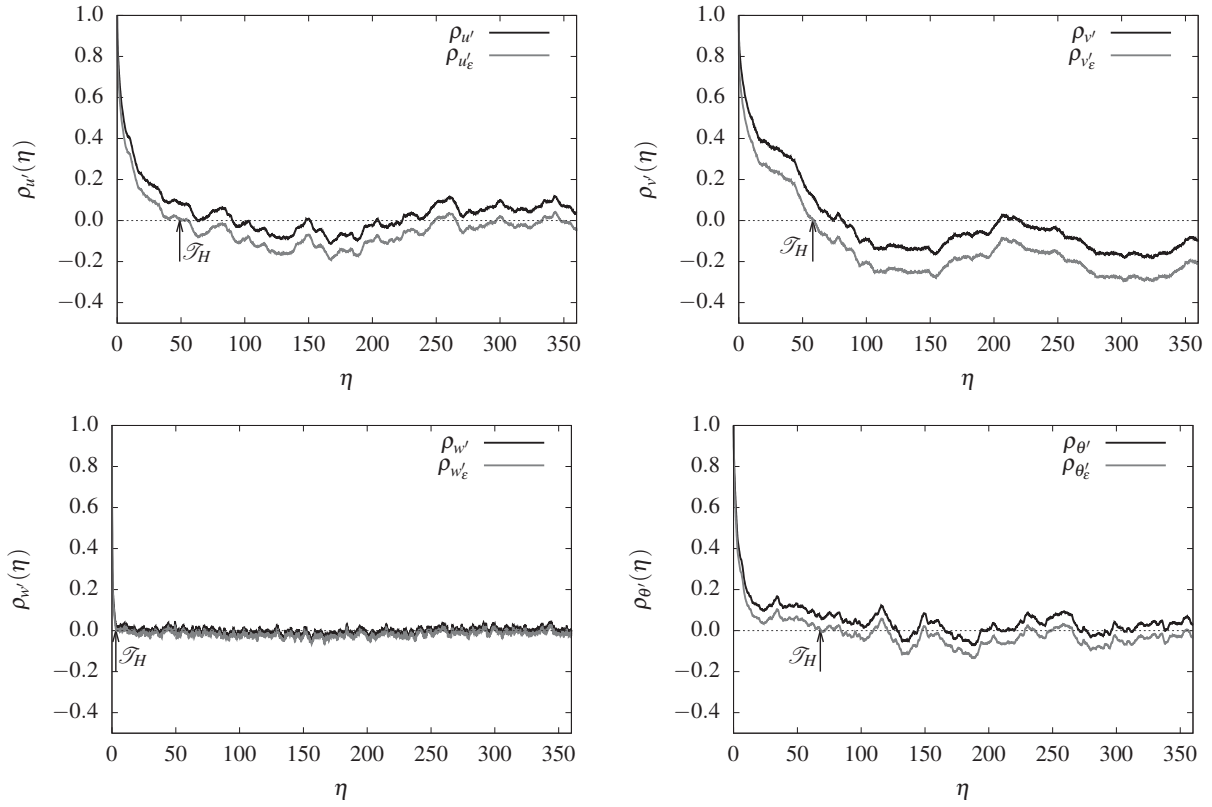


Figura 5.2: Exemplos da função de autocorrelação original (linha preta) e com a subtração de  $\epsilon$  (linha cinza) para as flutuações turbulentas de primeira ordem medidas em Tijucas do Sul em 17/02/2011 entre 14:20h e 14:50h.

definidos para cada variável e que nem sempre são iguais para uma mesma variável em sítios experimentais distintos. Deste modo é sempre importante avaliar para cada ambiente de estudo o intervalo adequado. Deixamos como recomendação para trabalhos futuros analisar estas variações no comportamento das variáveis relacionado com o local de medição.

Da mesma forma que para o MSE, é necessário definir um intervalo de ajuste para estimar o expoente de Hurst utilizando o intervalo ajustado R/S, equação (2.25). Para definirmos este intervalo foi realizado o mesmo procedimento descrito anteriormente: plotamos todas as estimativas de R/S *versus*  $\Delta$  normalizado por  $\mathcal{T}_H$ . O resultado deste procedimento pode ser visto na Figura 5.4. Analisando os resultados, notou-se que as séries de dados não convergiram como aconteceu para o MSE.

Devido a esta questão, plotamos R/S *versus*  $\Delta$  e o resultado encontrado pode ser visto na Figura 5.5: (a), (b) e (c)  $u'$ , (d), (e) e (f)  $w'u'$ , e (g), (h) e (i)  $w'w'\theta'$ , respectivamente, para Tijucas do Sul, Missal e AHATS. Analisando os gráficos percebemos que o comportamento das análises de R/S colapsaram e que agora é possível definir um intervalo para o ajuste dos dados. Todas as outras variáveis que não estão sendo apresentadas exibem um comportamento semelhante aos da Figura 5.5. O intervalo para o ajuste da lei de potência para as

Tabela 5.5: Melhores intervalos de  $\Delta/\mathcal{T}_H$  para a lei de potência prevista pela equação (2.19) para os momentos de primeira ordem.

$x$	Tijucas/AHATS		Missal	
	$\Delta/\mathcal{T}_{H\min}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\max}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\min}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\max}$
$u', v', \theta'$	0,2	3	0,2	3
$w'$	0,5	15	2	15

Tabela 5.6: Melhores intervalos de  $\Delta/\mathcal{T}_H$  para a lei de potência prevista pela equação (2.19) para os momentos de segunda ordem.

$x$	Tijucas/AHATS		Missal	
	$\Delta/\mathcal{T}_{H\min}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\max}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\min}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\max}$
$w'u', w'\theta'$	1,5	16	3	16
$u'u', v'v', w'w', \theta'\theta'$	0,5	7	0,5	7

Tabela 5.7: Melhores intervalos de  $\Delta/\mathcal{T}_H$  para a lei de potência prevista pela equação (2.19) para os momentos de terceira ordem.

$x$	Tijucas		Missal		AHATS	
	$\Delta/\mathcal{T}_{H\min}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\max}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\min}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\max}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\min}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\max}$
$w'u'u'$ e $w'e'$	1	10	1	10	1	10
$w'v'v'$ e $w'\theta'\theta'$	1	10	2	15	1	10
$w'w'u'$ e $w'w'\theta'$	1	10	0,8	6	1	10
$u'u'u', v'v'v'$ e $\theta'\theta'\theta'$	0,3	4	0,3	4	0,3	4
$w'w'w'$	2	30	2	30	1	10

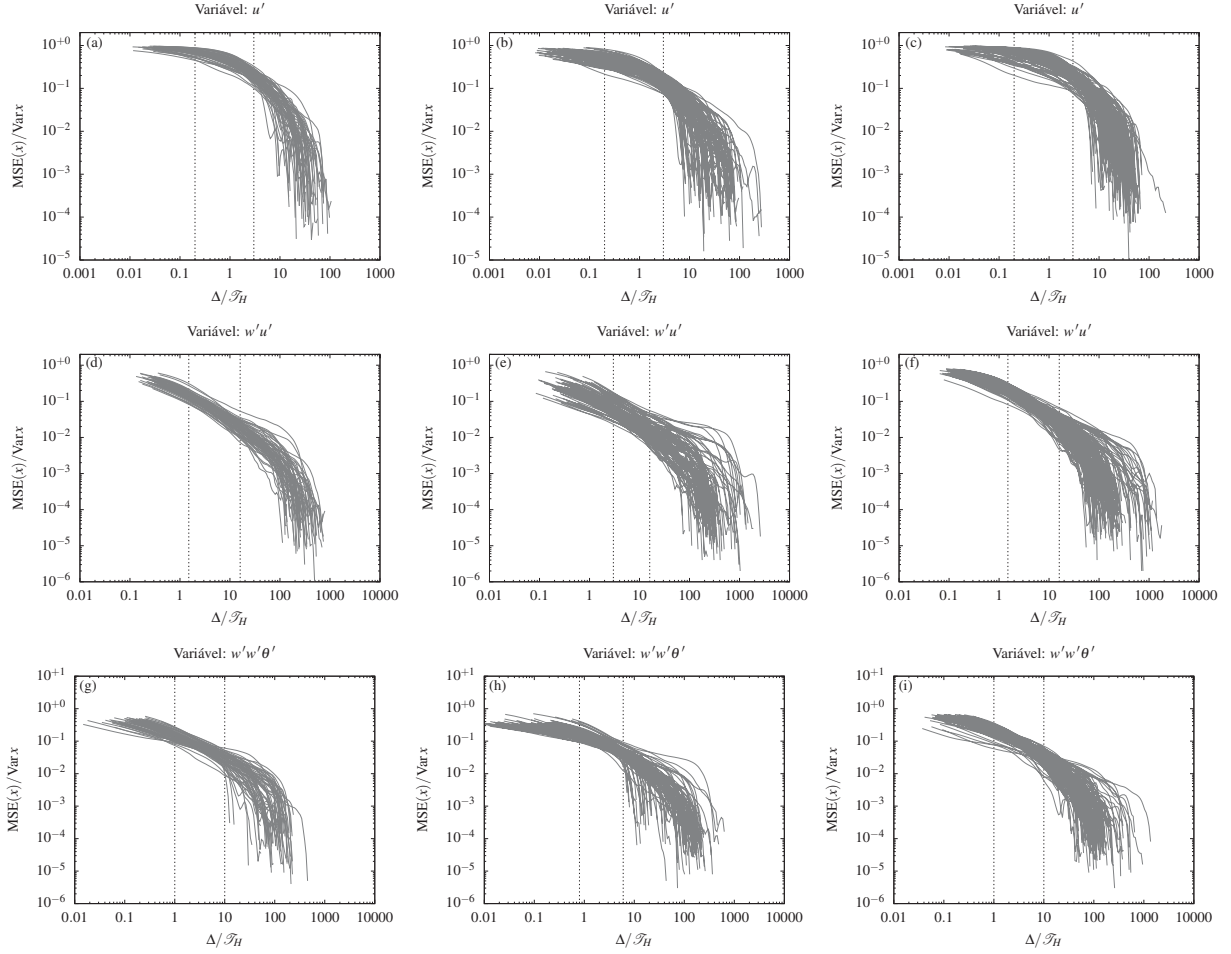


Figura 5.3: Gráficos adimensionais de  $MSE(x)/Var x$  versus  $\Delta/\mathcal{T}_H$  para todos os blocos, respectivamente, de Tijucas do Sul, Missal e AHATS: (a), (b) e (c)  $u'$ , (d), (e) e (f)  $w'u'$ , e (g), (h) e (i)  $w'w'\theta'$ .

análises de R/S foi escolhido igualmente para todas as variáveis:  $10\Delta - 100\Delta$ . Uma melhor análise do comportamento de R/S pode ser visto no Capítulo 6 (Subseção 6.6.2), a partir de análises realizadas com séries de diferentes tamanhos geradas a partir da série completa de 7h 30min de Mahomet.

### 5.3.2 Processamento inicial dos dados de Mahomet

Os dados utilizados da campanha de Mahomet são a velocidade do vento nas três direções  $u$ ,  $v$  e  $w$  medidas na altura de 3,5 m. Como comentado na seção de descrição das campanhas, em virtude do fato de que as medições apresentavam um grande período de estacionariedade, as análises do expoente de Hurst e a estimativa do erro aleatório para esta campanha serão realizadas tanto com o conjunto de dados completo contendo 7 horas e 30 minutos, como também com a fração de 15 blocos contendo 30 minutos. Para a análise do comportamento

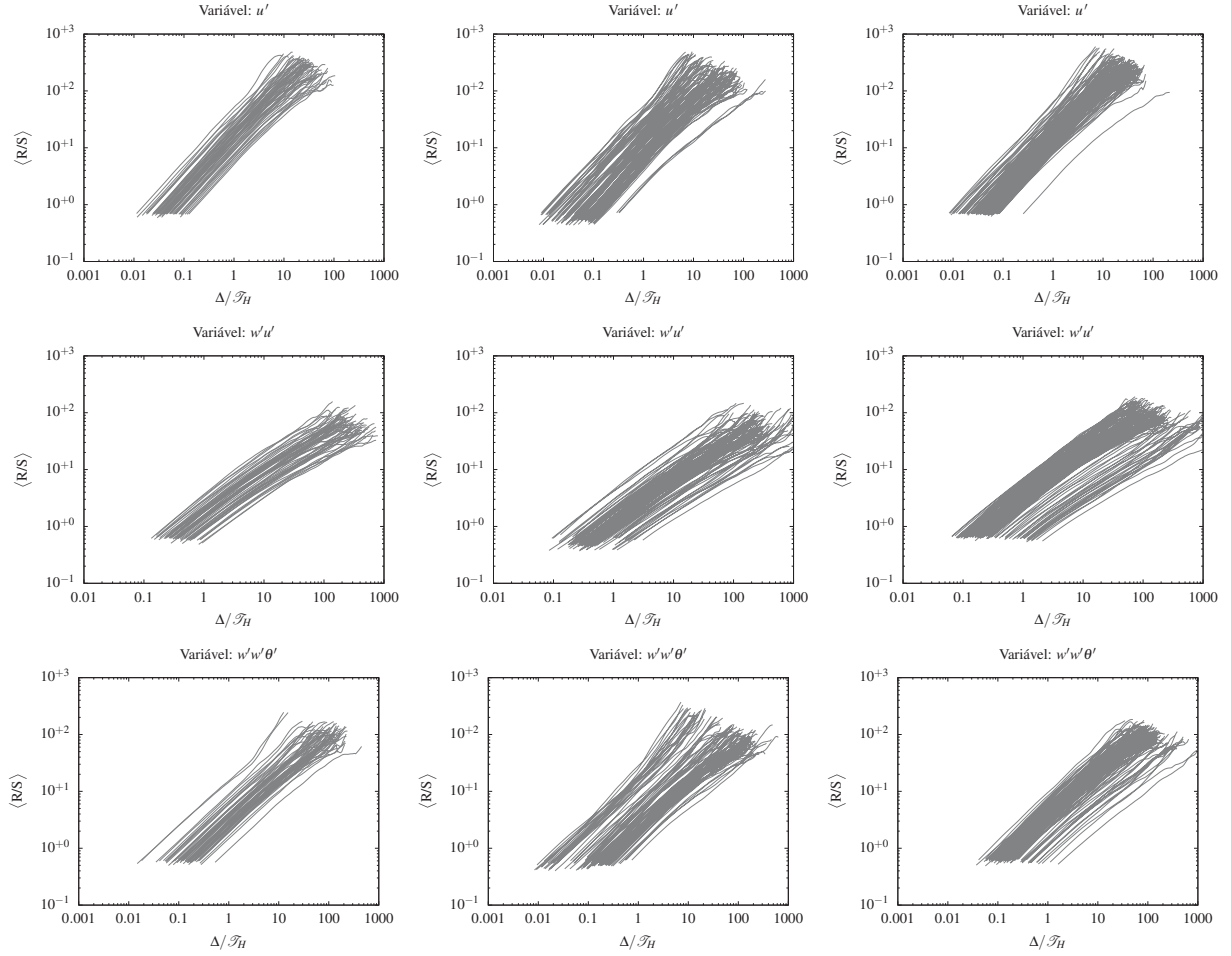


Figura 5.4: Gráficos de  $\langle R/S \rangle$  versus  $\Delta/\mathcal{T}_H$  para todos os blocos, respectivamente, de Tijucas do Sul, Missal e AHATS: (a), (b) e (c)  $u'$ , (d), (e) e (f)  $w'u'$ , e (g), (h) e (i)  $w'w'\theta'$ .

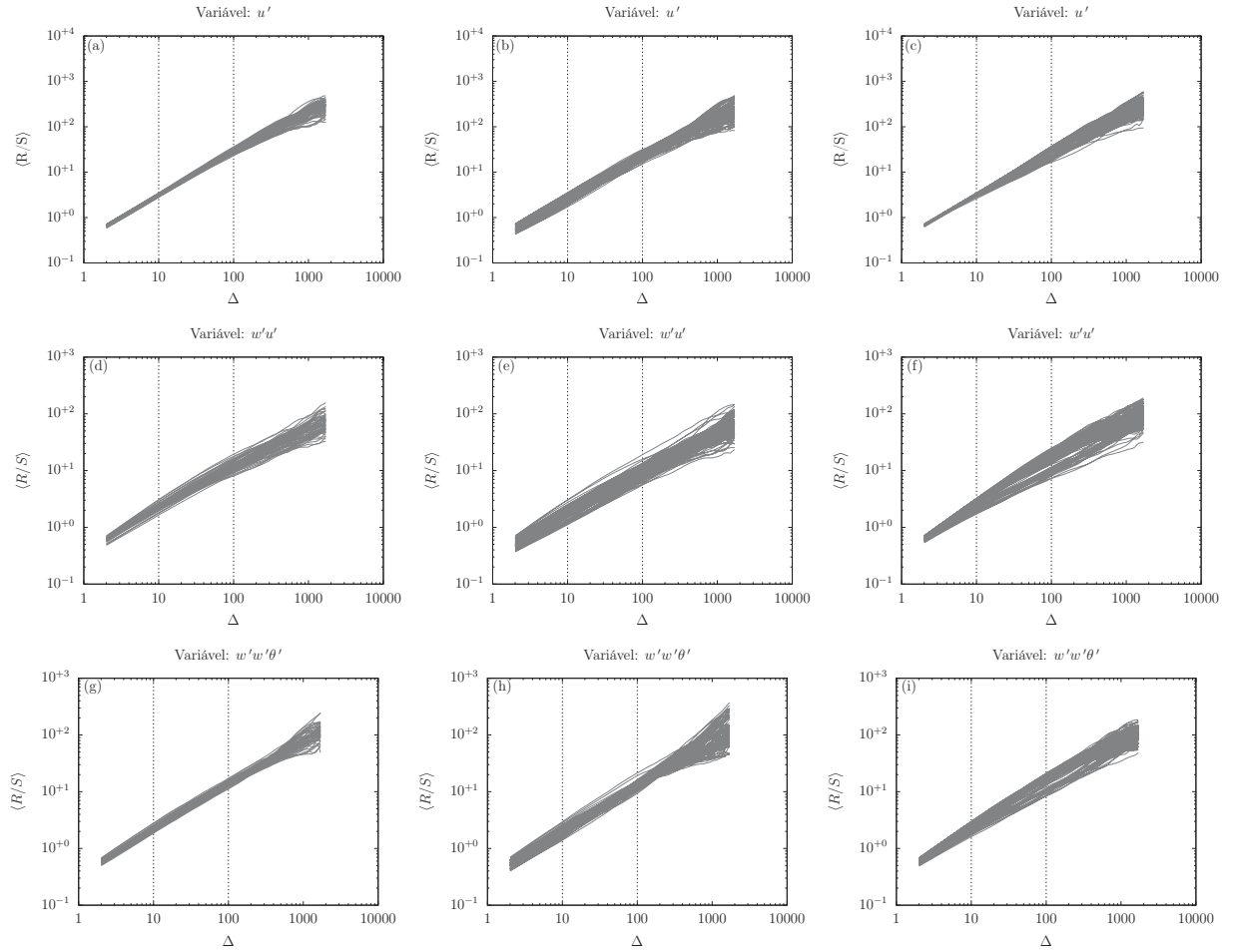


Figura 5.5: Gráficos de  $\langle R/S \rangle$  versus  $\Delta$  para todos os blocos, respectivamente, de Tijucas do Sul, Missal e AHATS: (a), (b) e (c)  $u'$ , (d), (e) e (f)  $w'u'$ , e (g), (h) e (i)  $w'w'\theta'$ .

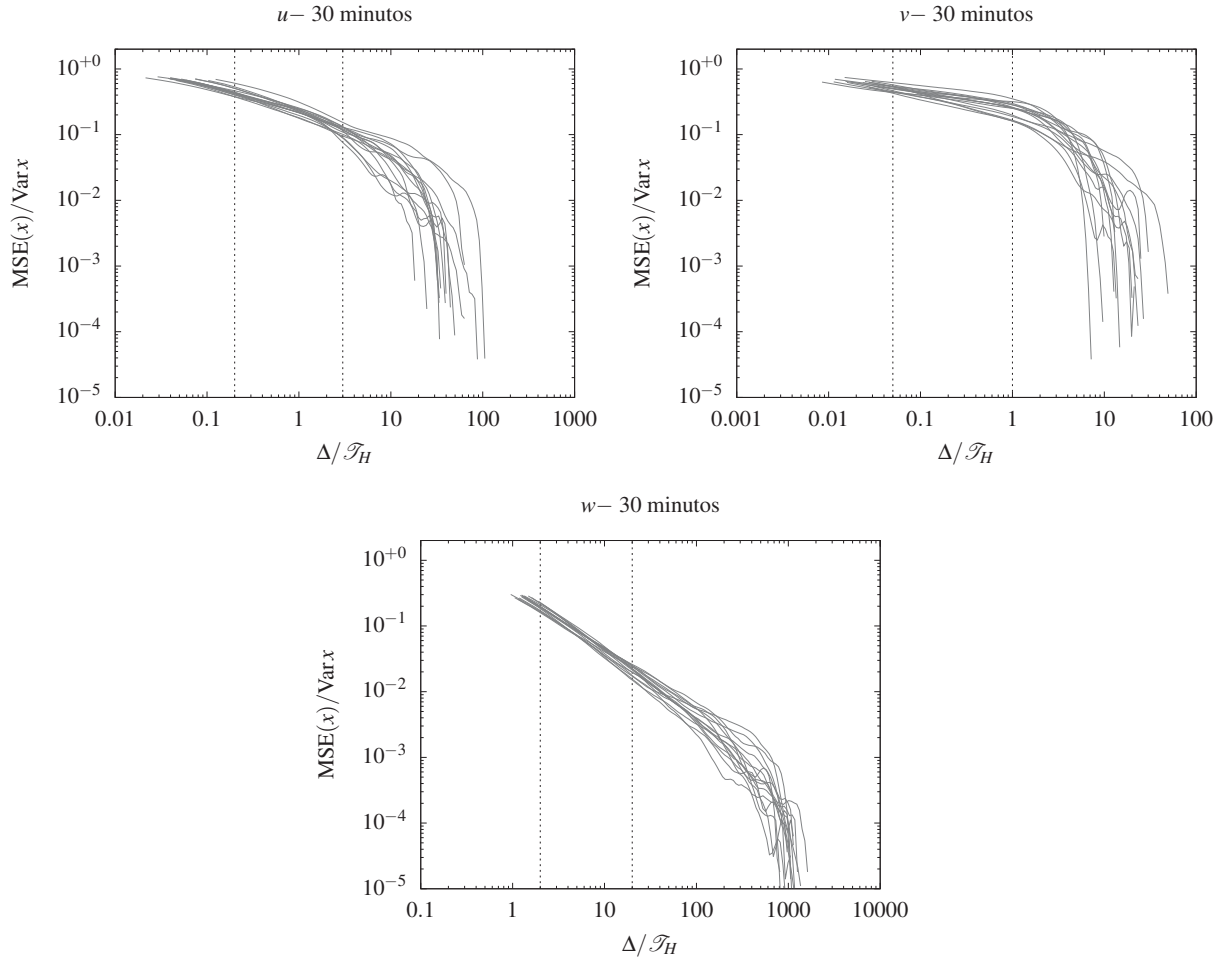


Figura 5.6: Gráficos adimensionais de  $MSE(x)/Var x$  versus  $\Delta/\mathcal{T}_H$  para as 15 séries de 30 minutos de  $u$ ,  $v$  e  $w$  medidas em Mahomet.

de R/S a série completa foi dividida em diferentes tamanhos de blocos. O único processamento realizado com a série completa foi a rotação de coordenadas 2D. Somente após este procedimento a série foi fracionada em blocos.

Para esta campanha estimaremos o expoente de Hurst utilizando o MFA e o R/S somente para as séries de 30 minutos. Para a série completa só aplicaremos o método MFA. O mesmo procedimento realizado para as campanhas de Tijucas do Sul, Missal e AHATS é necessário para a campanha de Mahomet: é necessário delimitar um intervalo para realizar o ajuste dos dados. Para as séries de 30 minutos, realizou-se o mesmo procedimento descrito anteriormente plotamos as 15 análises de: (i) MSE normalizadas pelas respectivas variâncias *versus*  $\Delta$  normalizado por  $\mathcal{T}_H$ ; e (ii) R/S *versus*  $\Delta$ . O resultado encontrado pode ser visto nas Figuras 5.6 e 5.7. Os intervalos utilizados para o ajuste de MSE estão apresentados na Tabela 5.8. Para o ajuste de R/S, novamente o intervalo é  $10\Delta - 100\Delta$ .

Para a série completa não é possível realizar este procedimento para a escolha do intervalo

Tabela 5.8: Melhores intervalos de  $\Delta/\mathcal{T}_H$  para a lei de potência prevista pela equação 2.19 para as séries de dados de 30 minutos de Mahomet.

$x$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\min}$	$\Delta/\mathcal{T}_{H\max}$
$u'$	0,2	3
$v$	0.05	1
$w'$	2	20

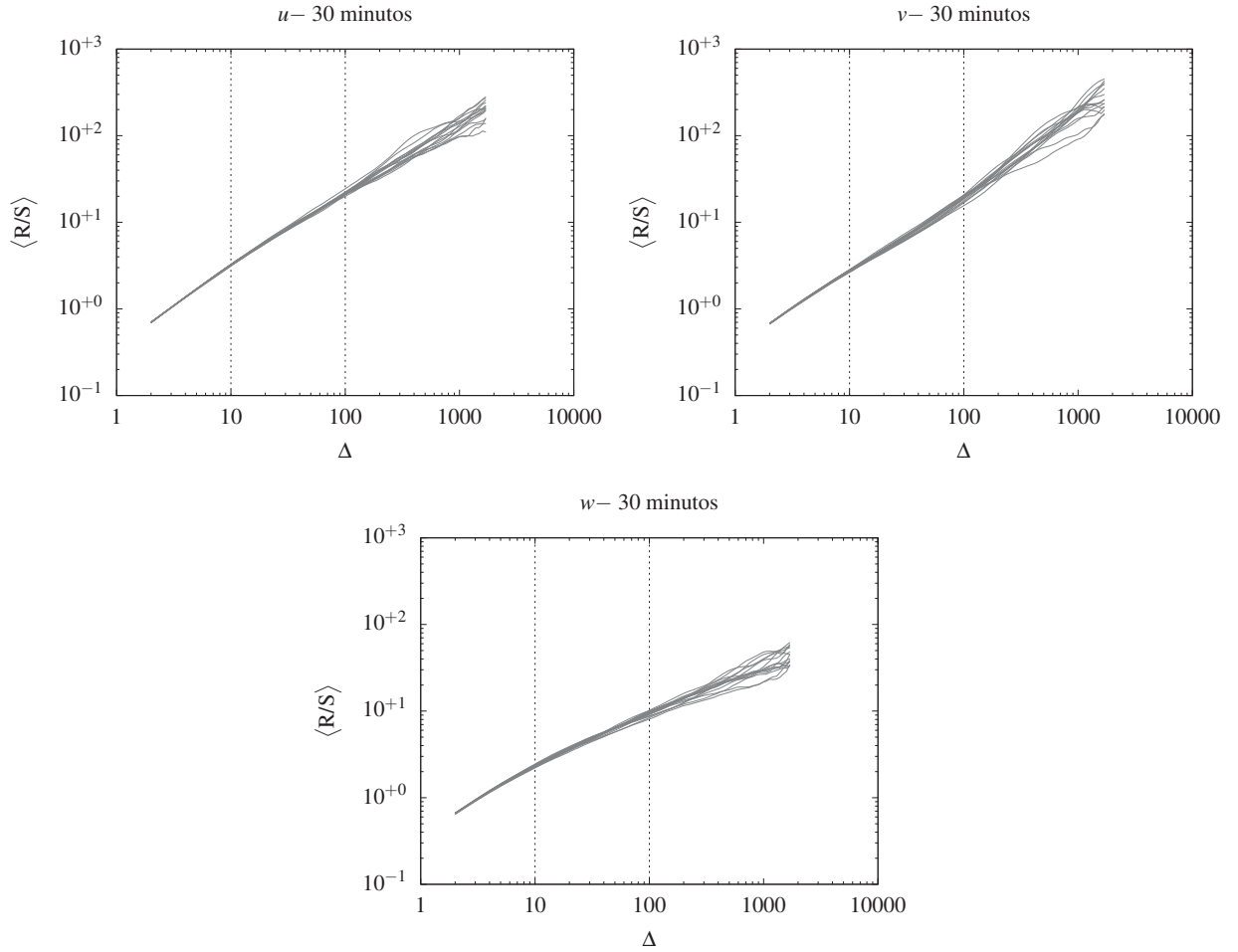


Figura 5.7: Gráficos de  $\langle R/S \rangle$  versus  $\Delta$  para as 15 séries de 30 minutos de  $u$ ,  $v$  e  $w$  medidas em Mahomet.

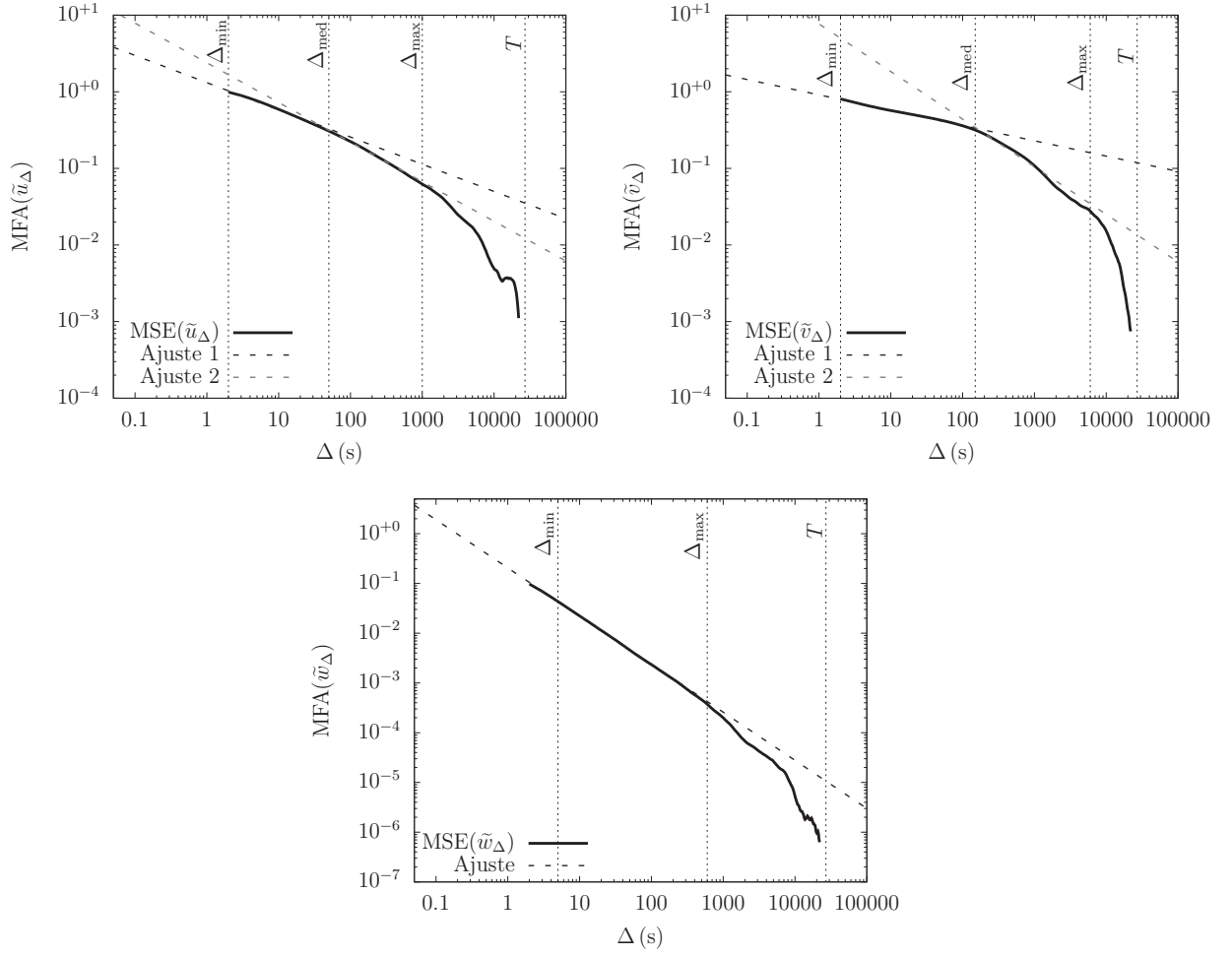


Figura 5.8: Comportamento do MSE para a escolha do intervalo de ajuste para a série completa de  $u$ ,  $v$  e  $w$  medidos em Mahomet.

de ajuste, pois só temos uma série para  $u$ ,  $v$  e  $w$ . Para definir o intervalo de ajuste para estes casos plotamos o MSE *versus*  $\Delta$  e analisamos o comportamento do MSE. Temos que  $u$  e  $v$  apresentam duas leis de potência distintas e  $w$  somente uma, sendo que não estamos considerando a lei de potência referente ao decaimento para  $\Delta$  próximo de  $T$ . Estes resultados podem ser vistos na Figura 5.8 e os intervalos utilizados para o ajuste dos dados na Tabela 5.9. No Capítulo dos resultados, na Seção 6.6, analisaremos qual é intervalo mais adequado para as variáveis  $u$  e  $v$ .



Tabela 5.9: Melhores intervalos de  $\Delta$  para a lei de potência prevista pela equação (2.19) para a série completa de  $u$ ,  $v$  e  $w$  medidos em Mahomet.

$x$	$\Delta_{\min}$	$\Delta_{\max}$
$u$ - Ajuste 1	2	50
$u$ - Ajuste 2	50	1000
$v$ - Ajuste 1	2	150
$v$ - Ajuste 2	6000	1000
$w$	5	700

## 6 Resultados Experimentais

Neste capítulo apresentaremos os resultados referentes às análises realizadas para avaliar o fenômeno de Hurst e a estimativa de erros aleatórios. Primeiramente iremos comparar as estimativas do expoente de Hurst obtidas a partir de séries sintéticas (smfGn) e de séries de dados micrometeorológicas. Nas próximas quatro seções serão descritos os resultados referentes aos dados das campanhas de Tijucas do Sul, Missal e AHATS. Essas seções incluem: a relação entre o fenômeno de Hurst e a remoção da tendência linear, a diferença entre MFA e R/S na estimativa do expoente de Hurst, as implicações do fenômeno de Hurst na estimativa de erros, e relações do fenômeno de Hurst e da estimativa de erros com a Teoria de Similidade de Monin-Obukhov. Somente na última seção deste capítulo serão apresentados os resultados referentes aos dados da campanha de Mahomet: análise do expoente de Hurst e a estimativa de erros, e a análise do estimador R/S.

### 6.1 Comparação das estimativas do expoente de Hurst de séries de smfGn e de dados de turbulência atmosférica

Nesta seção iremos comparar as estimativas do expoente de Hurst utilizando séries de smfGn e séries provenientes de campanhas micrometeorológicas. Temos que smfGn é estacionário e exibe o fenômeno de Hurst para  $1/2 < H < 1$ . Note no entanto, como já foi comentado no Capítulo 2, que o smfGn não modela corretamente a turbulência atmosférica. Desta forma, os resultados para as séries sintéticas de smfGn podem não ser diretamente aplicados à turbulência.

Para as análises com os dados sintéticos,  $n_b = 100$  blocos de smfGn foram gerados a partir de uma população com média zero e variância unitária, com o auxílio de uma biblioteca de Python chamada fbm<sup>1</sup>. Dois parâmetros precisam ser especificados para a obtenção das séries: o expoente de Hurst  $H$  e o tamanho  $T$  de cada bloco. Para o expoente de Hurst escolhemos  $H = 0,75$ , valor dentro do intervalo encontrado para as séries de

---

<sup>1</sup><https://github.com/crflynn/fbm>.

flutuações turbulentas de primeira ordem. Por tentativa e erro geramos blocos com tamanho de  $T = 10000$ , para produzir um valor médio de RMSE com relação ao desvio-padrão de  $x$

$$\epsilon_\sigma = \frac{1}{n_b} \sum_{\omega=1}^{n_b} \frac{\widehat{\text{RMSE}}(\tilde{x}_T)_\omega}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}\{x\}_\omega}} = 0,095, \quad (6.1)$$

onde o símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  indica que as estimativas de RMSE foram obtidas para cada bloco  $\omega$  usando (2.20) e que a variância foi calculada para cada bloco.

Para as séries turbulentas analisadas nesse trabalho,  $\epsilon_\sigma$  varia consideravelmente, dependendo do local de medição, período de análise e variável. O valor definido para a série sintética foi escolhido tomando como base valores de  $\epsilon_\sigma$  encontrados para  $u'$ : para Tijucas do Sul  $\epsilon_\sigma = 0,152$ , para Itaipu  $\epsilon_\sigma = 0,071$  e para AHATS  $\epsilon_\sigma = 0,119$ .

Nesta seção, estimaremos o expoente de Hurst para todos os blocos de smfGn utilizando seis diferentes métodos:

1.  $H_A$  – a partir do ajuste da lei de potência da função de autocorrelação;
2.  $H_D$  – a partir do ajuste da lei de potência da função de estrutura;
3.  $H_W$  – com o método do coeficiente de *wavelet* promediado;
4.  $H_Z$  – com o método *zero-crossing*;
5.  $H_p$  – com o método MFA;
6.  $H_R$  – com o método R/S.

A Figura 6.1 exemplos dos métodos utilizados para as estimativas de  $H$  a partir dos blocos de smfGn. Analisando os gráficos desta figura é possível notar claramente a alta variabilidade da cauda das funções de autocorrelação e de estrutura, o que afeta as estimativas  $H_A$  e  $H_D$  em relação às estimativas restantes.

A Tabela 6.1 mostra as estatísticas para a estimativa de  $H$  referentes aos 100 blocos do smfGn. Temos que  $H_A$ ,  $H_D$  e  $H_R$  são mais variáveis (como podemos ver nos valores do desvio-padrão) se comparados com  $H_W$ ,  $H_Z$  e  $H_p$ . Os resultados da Tabela 6.1 sugerem que os estimadores  $H_D$  e  $H_R$ , por apresentarem valores médios com mais de um desvio-padrão do valor real 0,75, podem ser enviesados. Resultados similares para  $H_R$  já foram encontrados em Taqqu et al. (1995); Burlando et al. (1996); Montanari et al. (1997); Bisaglia e Guégan (1998).

Em termos de variabilidade e da distância do valor real ( $H = 0,75$ ),  $H_W$ ,  $H_Z$  e  $H_p$  têm os melhores desempenhos.  $H_W$  tem um desempenho muito bom para dados de ruído Gaussiano fracionado suavizado e, embora ligeiramente mais variável,  $H_p$  também é uma boa estimativa de  $H$  para dados de smfGn.

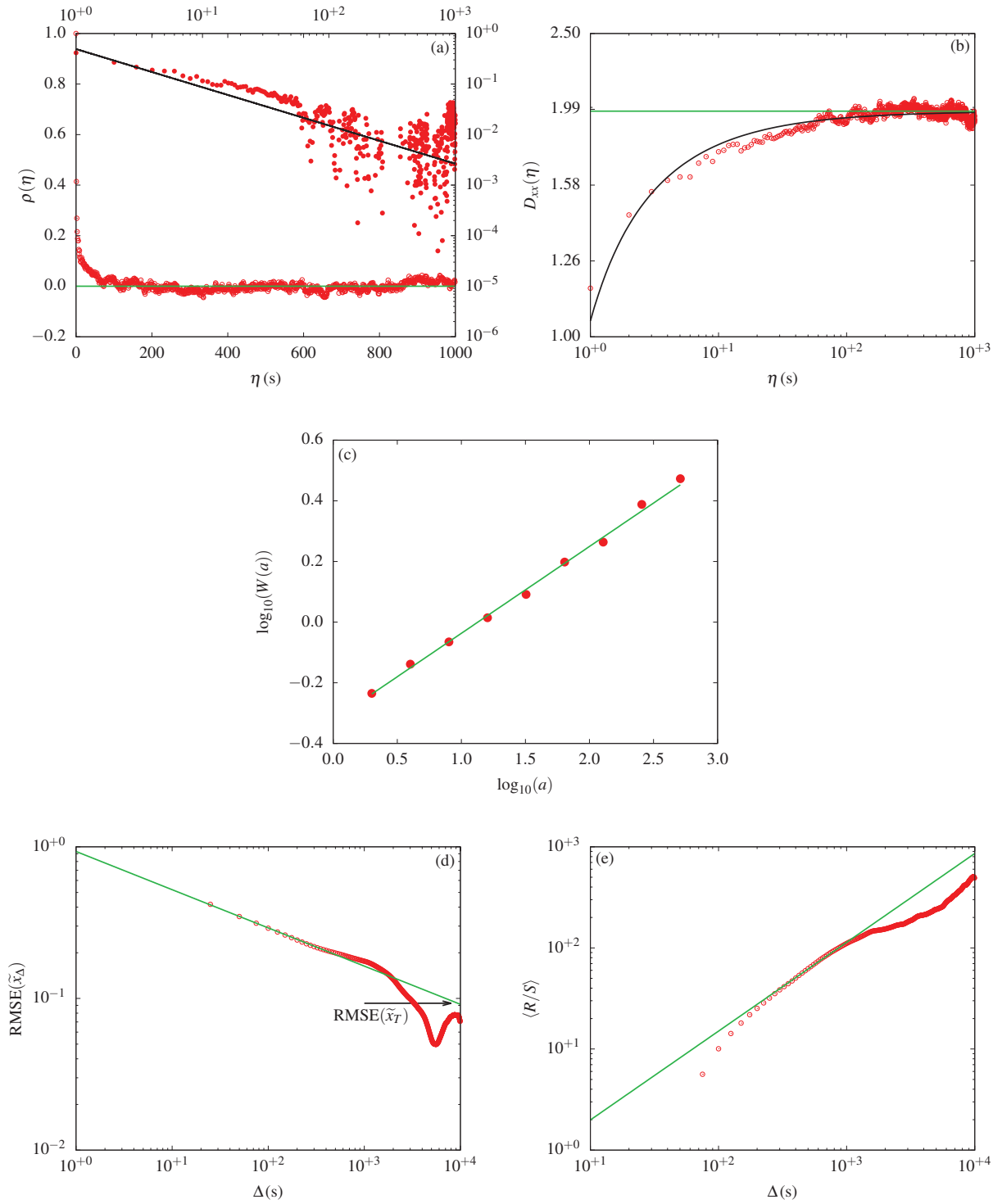


Figura 6.1: Métodos para a estimativa do expoente de Hurst: (a) função de autocorrelação; (b) função de estrutura; (c) espectro de *wavelet*; (d) MFA; e (e) R/S, para séries sintéticas de smfGn (figura adaptada de Dias et al. (2018)).

Tabela 6.1: Estatísticas das estimativas de  $H$  para 100 blocos de smfGn.

	$H_A$	$H_D$	$H_W$	$H_Z$	$H_p$	$H_R$
Mínimo	0,564	0,559	0,719	0,714	0,727	0,714
Máximo	0,914	0,861	0,794	0,782	0,842	1,018
Média	0,732	0,682	0,762	0,750	0,752	0,862
desvio-padrão	0,073	0,061	0,016	0,010	0,024	0,065

Tabela 6.2: Estatísticas das estimativas de  $H$  para 130 blocos de 30 minutos de  $u'$  da campanha AHATS.

	$H_Z$	$H_p$	$H_R$
Mínimo	0,966	0,714	0,700
Máximo	0,999	0,903	1,074
Média	0,991	0,815	0,956
desvio-padrão	0,006	0,031	0,081

A Figura 6.2 mostra as mesmas funções utilizadas para a estimativa do expoente de Hurst para uma série de velocidade do vento  $u'$  medida no dia 17/07/2008 entre 08:30h e 09:00h na campanha AHATS. Tem-se que dados de turbulência atmosférica apresentam mais de uma lei de potência nas funções de autocorrelação, de estrutura e no espectro de *wavelet*. As leis de potência identificadas nos gráficos da Figura 6.2 (a), (b) e (c) são referentes à faixa inercial, e não correspondem às grandes escalas, foco do interesse nesse trabalho. Desta forma, somente as estimativas  $H_p$ ,  $H_R$  e  $H_Z$  podem ser obtidas nesse caso.

A Tabela 6.2 mostra as estatísticas referentes a estimativa de  $H$  para os 130 blocos de 30 minutos de  $u'$  da campanha AHATS. Note, conforme já comentado, que somente foram obtidas as estimativas  $H_p$ ,  $H_R$  e  $H_Z$ . Esses dados apresentam diferentes condições de estabilidade e intensidade de turbulência. Assim, é normal que exista mais variabilidade nas estimativas em comparação com as séries sintéticas.

Diferentemente das estimativas de  $H_Z$  para as séries sintéticas, para as séries turbulentas de  $u'$   $H_Z$  não se comportou adequadamente. Os valores encontrados por  $H_Z$  são próximos de 0,991, valor muito alto se comparado com as outras estimativas. Esse resultado também é diferente do encontrado por Shi et al. (2005), que encontraram valores de  $H_Z$  ligeiramente inferiores a 1/2 para os seus dados. Note que nossos dados foram obtidos a 20 Hz, em contraste com os dados obtidos com uma frequência de 56 Hz em Shi et al. (2005). Desta forma os dois resultados não são comparáveis, visto que a taxa de medição está obviamente relacionada com a contagem de vezes que a série de dados cruza o eixo  $x$ .

A estimativa  $H_R$  apresenta valores maiores que a estimativa  $H_p$ . Taqqu et al. (1995) mostraram, usando sequências de ruídos Gaussianos e ARIMA fracionário, que as estimativas de  $H_p$ , como também de outros estimadores, são mais próximas do valor real de  $H$  se

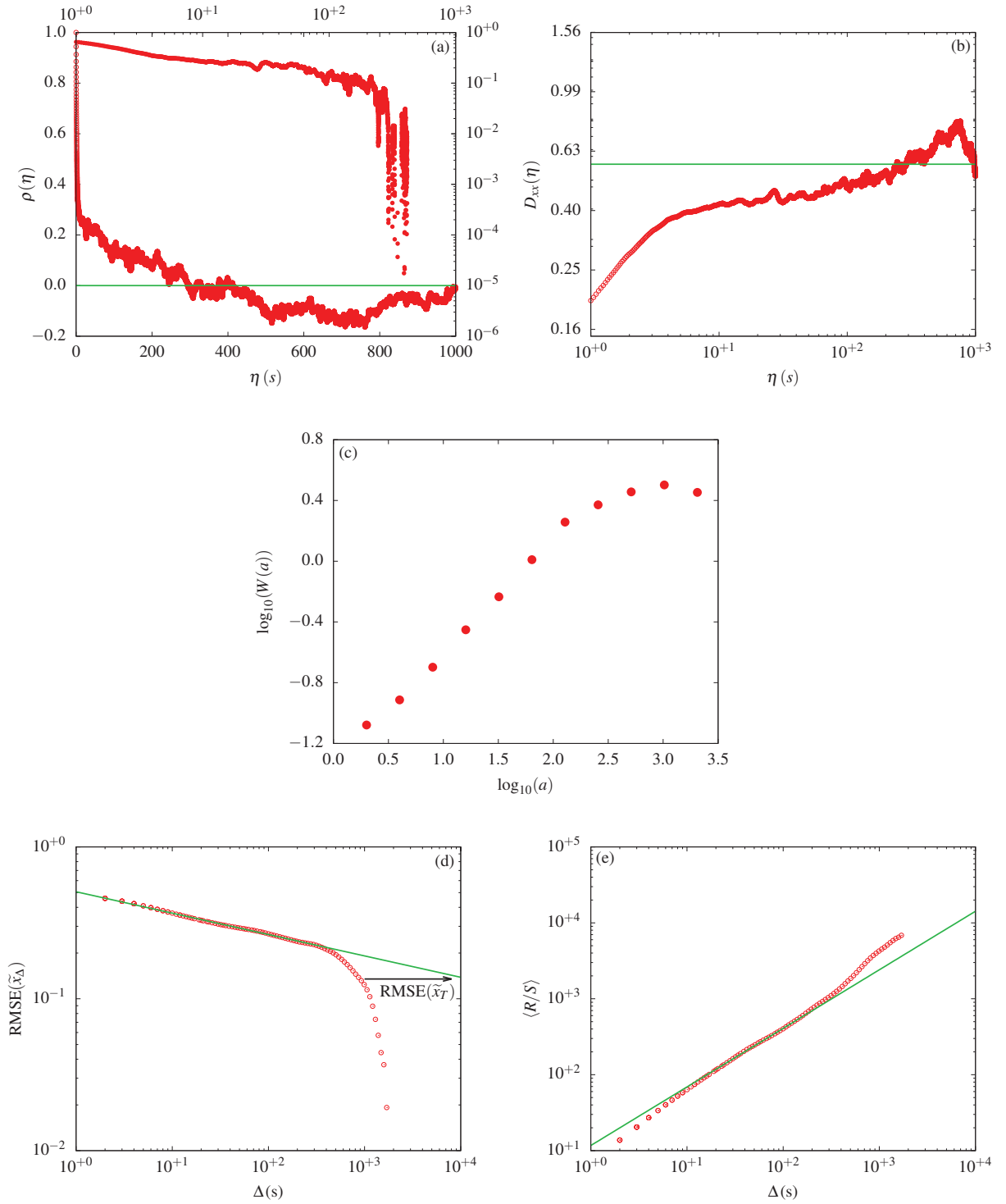


Figura 6.2: Métodos para a estimativa do expoente de Hurst: (a) função de autocorrelação; (b) função de estrutura; (c) espectro de *wavelet*; (d) MFA; e (e) R/S, para uma série de velocidade do vento  $u'$  medida em AHATS em 17/07/2008 entre 08:30h e 09:00h (figura adaptada de Dias et al. (2018)).

comparadas com as estimativas de  $H_R$ . Taqqu et al. (1995) avaliam outros sete estimadores, e nem o MFA ou o R/S são os melhores estimadores em relação ao viés (mínimo) para o maior  $H$  analisado. Considerando-se os resultados de Taqqu et al. (1995) e os resultados encontrados neste trabalho, nós conjecturamos que R/S pode estar superestimando os valores de  $H_R$  para turbulência. No entanto, mais estudos são necessários para verificar o viés dos estimadores para dados de turbulência.

A partir dos resultados encontrados nesta seção, na sequência deste trabalho analisaremos somente as estimativas de  $H_p$  e  $H_R$ , provenientes do MFA e do R/S para as flutuações de primeira, segunda e terceira ordem. Iremos utilizar estes estimadores devido ao fato de R/S ser o método clássico para estimativa de  $H$  e o MFA além de detectar o fenômeno de Hurst, tem relação com a estimativa de erros aleatórios.

## 6.2 A relação entre o fenômeno de Hurst e a remoção da tendência linear

Frequentemente se argumenta que a não-estacionariedade pode ser a causa do fenômeno de Hurst (Klemes, 1974; Potter, 1976; Boes e Salas, 1978; Mesa e Poveda, 1993; Bras e Rodríguez-Iturbe, 1993). Em análises de turbulência na camada superficial a não-estacionariedade é um problema real, e devido a isto é comum realizar um pré-processamento nas séries de dados com o objetivo de reduzir os efeitos da não-estacionariedade. Ultimamente, um procedimento que está sendo bastante utilizado é a remoção da tendência linear (Lee et al., 2005; Aubinet et al., 2012).

Note que neste trabalho as séries de dados já passaram por um controle de qualidade, com o objetivo de eliminar as séries que apresentavam sinais de não-estacionariedade. O processo de remoção da tendência linear remove somente alguma tendência restante em torno da média, desta forma não esperamos que hajam grandes efeitos no expoente de Hurst devido a efeitos de não-estacionariedade. No entanto, quando são realizados procedimentos para a remoção da tendência, é inevitável que as correlações de longo prazo, as quais são relacionadas com o fenômeno de Hurst, sejam suavizadas ou até mesmo removidas.

Levando em consideração essas questões, nesta seção analisaremos se a remoção da tendência linear aplicada nas séries de dados afeta a estimativa do expoente de Hurst. Para realizarmos esta verificação estimamos o expoente de Hurst utilizando o MFA e o R/S para as variáveis de primeira ordem: dados brutos ( $u, v, w$  e  $\theta$ ) e dados após a remoção da tendência linear ( $u_{ld}, v_{ld}, w_{ld}$  e  $\theta_{ld}$ ).

As Figuras 6.3 e 6.4 mostram a estimativa do expoente de Hurst antes ((a) – MFA e (b) – R/S) e depois da remoção da tendência linear ((c) – MFA e (d) – R/S), respectivamente para uma série de dados de  $u$  medida em Missal e de  $\theta$  medida em Tijucas do Sul. É possível

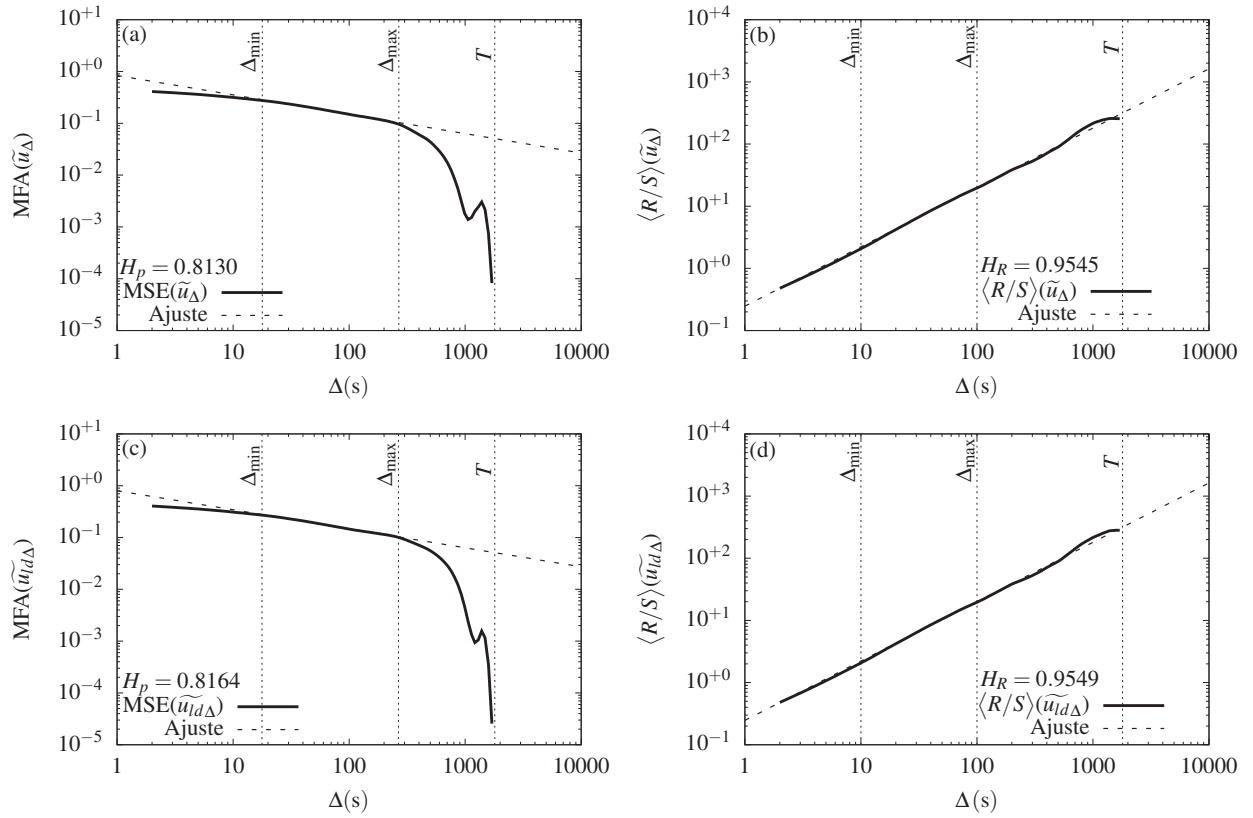


Figura 6.3: Estimativa do expoente de Hurst para  $u$  ((a) – MFA e (b) – R/S) e  $u_{id}$  ((c) – MFA e (d) – R/S) – série da dados de Missal medida em 24/08/2013 entre 17:20h e 17:50h.

notar que para estes casos a diferença entre as estimativas do expoente de Hurst, antes e depois da remoção da tendência linear, é muito pequena, e que após a remoção da tendência linear o expoente  $H$  continua maior que  $1/2$ .

Com o objetivo de entender melhor como a remoção da tendência linear afeta o expoente de Hurst, realizamos as seguintes análises estatísticas: (i) teste t de Welch, a fim de verificar se as médias de  $H$ , antes e depois da remoção da tendência linear, são iguais; e (ii) teste t, com o objetivo de verificar se após a remoção da tendência linear o valor de  $H$  é igual a  $1/2$  (Montgomery e Runger, 2011). Ambos os testes têm como variáveis de saída: o valor referente ao teste estatístico e o valor- $p$ . O valor- $p$  é o menor nível de significância com que o hipótese nula é rejeitada. Assim, se  $\text{valor-}p \leq 0,05$ , nós rejeitamos as hipóteses nulas: (i) de que as médias são iguais antes e depois da remoção da tendência linear; e (ii) de que o valor de  $H$  após a remoção da tendência linear é igual a  $1/2$ , com um nível de significância de 5%. Os resultados destas estatísticas para os dados de Tijucas do Sul estão apresentados nas Tabelas 6.3 e 6.4, respectivamente, para o teste t de Welch e para o teste t.

A Tabela 6.3 mostra que a hipótese de que as médias de  $H$ , antes e depois da remoção da tendência linear, são iguais é aceita para as variáveis  $u$ ,  $v$  e  $w$  e rejeitada para a variável  $\theta$



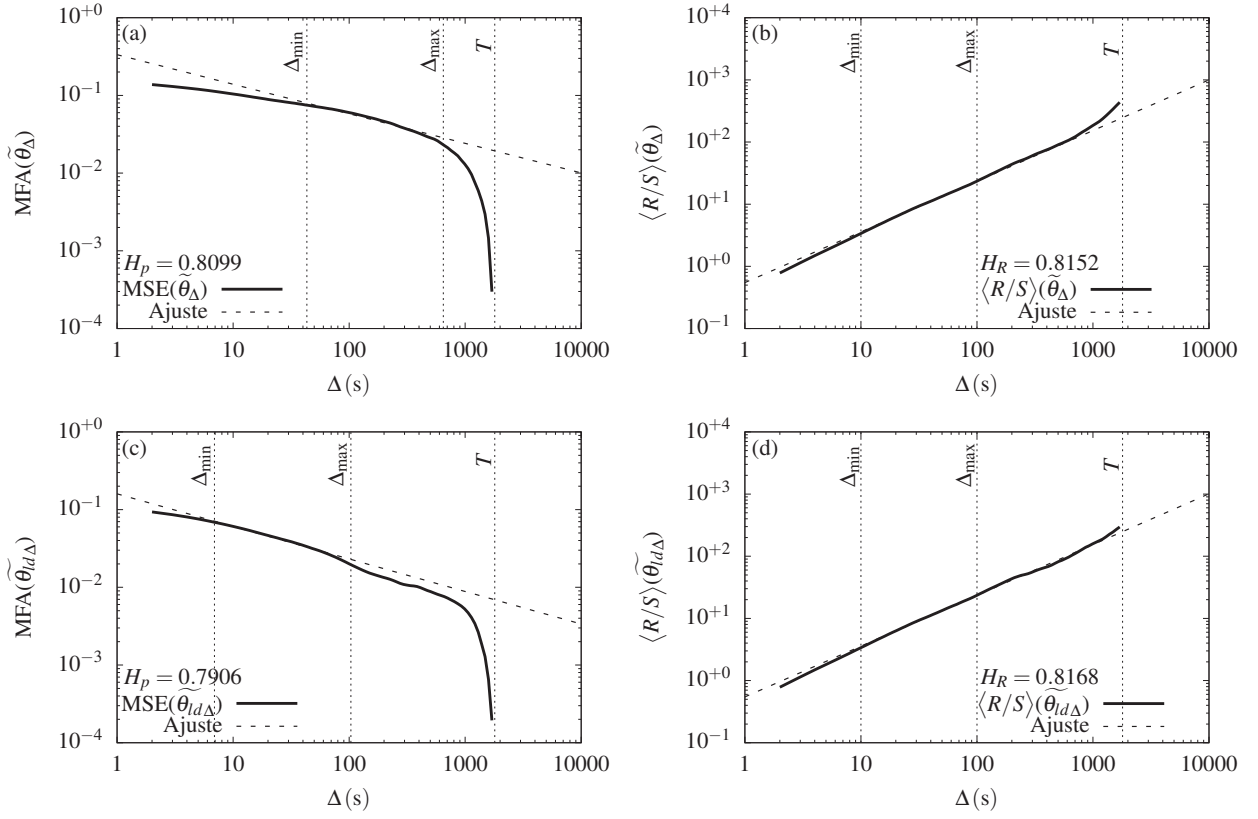


Figura 6.4: Estimativa do expoente de Hurst para  $\theta$  ((a) – MFA e (b) – R/S) e  $\theta_{ld}$  ((c) – MFA e (d) – R/S) – série da dados de Tijucas do Sul medida em 22/02/2011 entre 10:50h e 11:20h.

Tabela 6.3: Teste t de Welch para avaliar a igualdade das médias de  $H$  antes e depois da remoção da tendência linear para os dados de primeira ordem de Tijucas do Sul.

Variáveis	$MFA(\tilde{x}_\Delta)$		$\langle R/S \rangle(\tilde{x}_\Delta)$	
	Teste de Welch	valor- $p$	Teste de Welch	valor- $p$
$u$	-0,0907	0,9278	0,0093	0,9926
$v$	0,9288	0,3548	0,0101	0,9920
$w$	0,7173	0,4745	0,0000	0,9999
$\theta$	3,7120	0,0003	0,0152	0,9879

Tabela 6.4: Teste t para avaliar se  $H$  após a remoção da tendência linear é igual a  $1/2$  para os dados de primeira ordem de Tijucas do Sul.

Variáveis	$MFA(\tilde{x}_\Delta)$		$\langle R/S \rangle(\tilde{x}_\Delta)$	
	Teste t	valor- $p$	Teste t	valor- $p$
$u$	87,517	$< 0,0001$	73,594	$< 0,0001$
$v$	108,50	$< 0,0001$	99,051	$< 0,0001$
$w$	48,881	$< 0,0001$	45,688	$< 0,0001$
$\theta$	67,078	$< 0,0001$	85,815	$< 0,0001$

para o estimador MFA. Para o estimador R/S a hipótese nula é aceita para todas as variáveis, ou seja, estatisticamente as médias antes e depois da remoção da tendência linear são iguais. Para AHATS o resultado é o mesmo; já para Missal a hipótese é rejeitada para as variáveis  $v$  e  $\theta$  para o estimador MFA.

A Tabela 6.4 mostra que a hipótese de que  $H = 1/2$  após a remoção da tendência linear é rejeitada para todas as variáveis independentemente do estimador, ou seja, mesmo após a remoção da tendência linear os dados continuam apresentando o fenômeno de Hurst, pois  $H$  continua maior que  $1/2$ . Para Missal e AHATS o resultado é o mesmo, e a hipótese nula também é rejeitada para todos os casos.

A série de  $\theta$  apresenta uma tendência linear maior, por exemplo, que a série de  $u$  (veja Figura 5.1). Analisando os gráficos da Figura 6.4 e o resultado da Tabela 6.3, notamos que a diferença entre as estimativas de  $H$  para  $\theta$ , antes e após a remoção da tendência linear, é maior para o estimador MFA, ou seja, este estimador é mais sensível aos efeitos da não-estacionariedade. Este resultado também acontece em Missal e AHATS, sendo que para a campanha de Missal  $v$  também apresentou este comportamento.

Por fim, podemos concluir que a remoção da tendência linear pode, em alguns casos, reduzir o valor de  $H$ , principalmente como é o caso da variável  $\theta$ , porém nunca — nos dados analisados — fazer com que o expoente de Hurst seja igual a  $1/2$ . Em outras palavras, o fenômeno de Hurst, caracterizado por  $H > 1/2$ , permanece claramente visível em todas as séries de dados analisadas neste trabalho mesmo após a remoção da tendência linear. Esta conclusão vale para os dados de primeira ordem. Para as demais ordens são necessários estudos adicionais para realizar esta verificação.

## 6.3 Diferenças entre MFA e R/S nas estimativas de $H$

A partir desta seção analisaremos as flutuações turbulentas de primeira, segunda e terceira ordem as quais foram previamente definidas na Tabela 5.4. Laushey (1951), Nordin et al. (1972) e Helland e Van Atta (1978) já observaram que séries turbulentas deste tipo,

medidas tanto em túnel de vento quanto na natureza, apresentam o fenômeno de Hurst.

Nesta seção estimaremos o expoente de Hurst utilizando o método MFA de acordo com a função MSE definida em (2.11), e o método clássico apresentado por Hurst (1951), o intervalo ajustado definido em (2.24). Conforme já comentado anteriormente, estudos anteriores mostram que as estimativas  $H_p$  (equações 2.19 e 4.1) e  $H_R$  (equação 2.25) são diferentes e que o estimador R/S pode ser enviesado (Taqqi et al., 1995; Burlando et al., 1996; Montanari et al., 1997; Bisaglia e Guégan, 1998; Caccia et al., 1997; Hamed, 2007). No decorrer desta seção mostraremos que para os dados de turbulência as estimativas  $H_p$  e  $H_R$  também são diferentes, e que para a maioria dos casos  $H_R$  é maior que  $H_p$ .

Primeiramente, apresentaremos exemplos da estimativa do expoente de Hurst utilizando o MFA e o R/S para um caso de Tijucas do Sul medido em 18/02/2017 entre 15:50h e 16:20h. Os resultados podem ser observados nas Figuras: 6.5 – flutuações de primeira ordem, 6.6 – flutuações de segunda ordem: covariâncias, 6.7 – flutuações de segunda ordem: variâncias e 6.8 – flutuações de terceira ordem. Para as flutuações de terceira ordem serão mostrados exemplos de somente algumas das variáveis analisadas neste trabalho. Analisando estas figuras vemos que, especificamente para este caso, as estimativas  $H_p$  e  $H_R$  são diferentes, sendo que  $H_R$  é maior que  $H_p$ . Também é possível verificar que todos os casos apresentam valores de  $H$  maiores que  $1/2$ , ou seja, todas as variáveis analisadas deste caso apresentam o fenômeno de Hurst.

Para analisarmos melhor a diferença entre os dois estimadores plotamos  $H_p$  versus  $H_R$  para todas as flutuações turbulentas definidas na Tabela 5.4. Os resultados obtidos estão apresentados nas Figuras: 6.9 – flutuações de primeira ordem; 6.10 – flutuações de segunda ordem; e 6.11 – flutuações de terceira ordem. Analisando estas figuras é possível notar que para os dados de turbulência estudados neste trabalho as estimativas de  $H$  são claramente diferentes para os dois estimadores MFA e R/S, sendo que para a grande maioria dos casos os valores de  $H_R$  são maiores que os de  $H_p$ . Nota-se também que, independentemente do estimador, praticamente todos os casos possuem  $H$  maior que  $1/2$ , ou seja, apresentam o fenômeno de Hurst.

Outra questão que podemos observar é que em alguns casos as estimativas de R/S apresentam valores de  $H$  maior que 1. Koutsoyiannis (2002) comenta que a incerteza do intervalo ajustado é grande e que estimativas utilizando este método podem gerar de valores  $H$  maiores que 1, o que não é permitido teoricamente. Casos em que  $H > 1$  também são encontrados em Helland e Van Atta (1978) e Vogel et al. (1998). Também verificamos alguns casos em que  $H < 1/2$ , principalmente nas flutuações relacionadas com  $w'$  e, conforme já descrito anteriormente, estes casos são conhecidos na literatura como anti-persistência (Mansukhani, 2012).

Analisando os gráficos da Figura 6.9 verificamos que os expoentes de Hurst para  $w'$

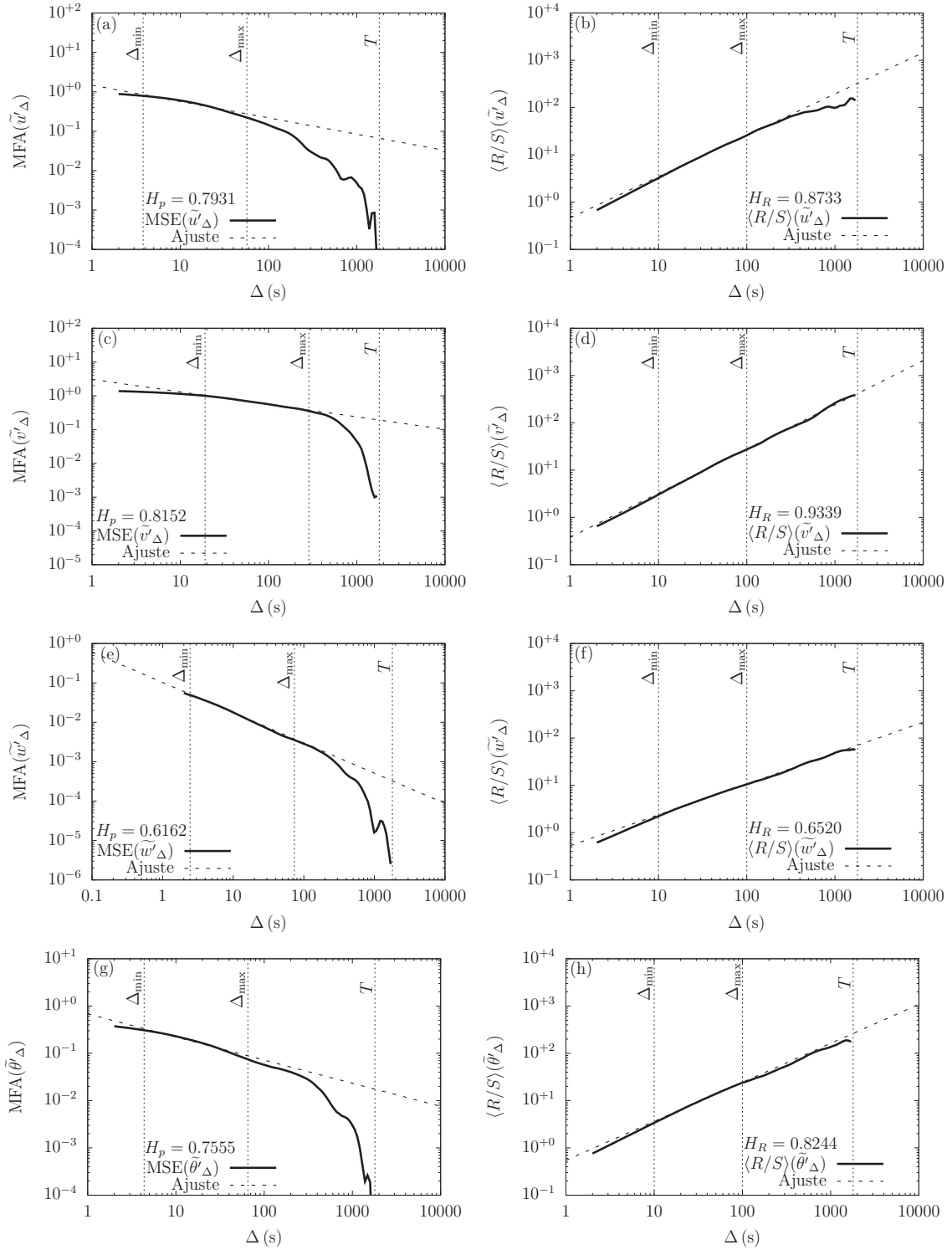


Figura 6.5: Exemplos da estimativa de  $H$  utilizando o MFA e o R/S para os dados de primeira ordem ( $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  e  $\theta'$ ) de Tijucas do Sul medidos em 18/02/2011 entre 15:50h e 16:20h.

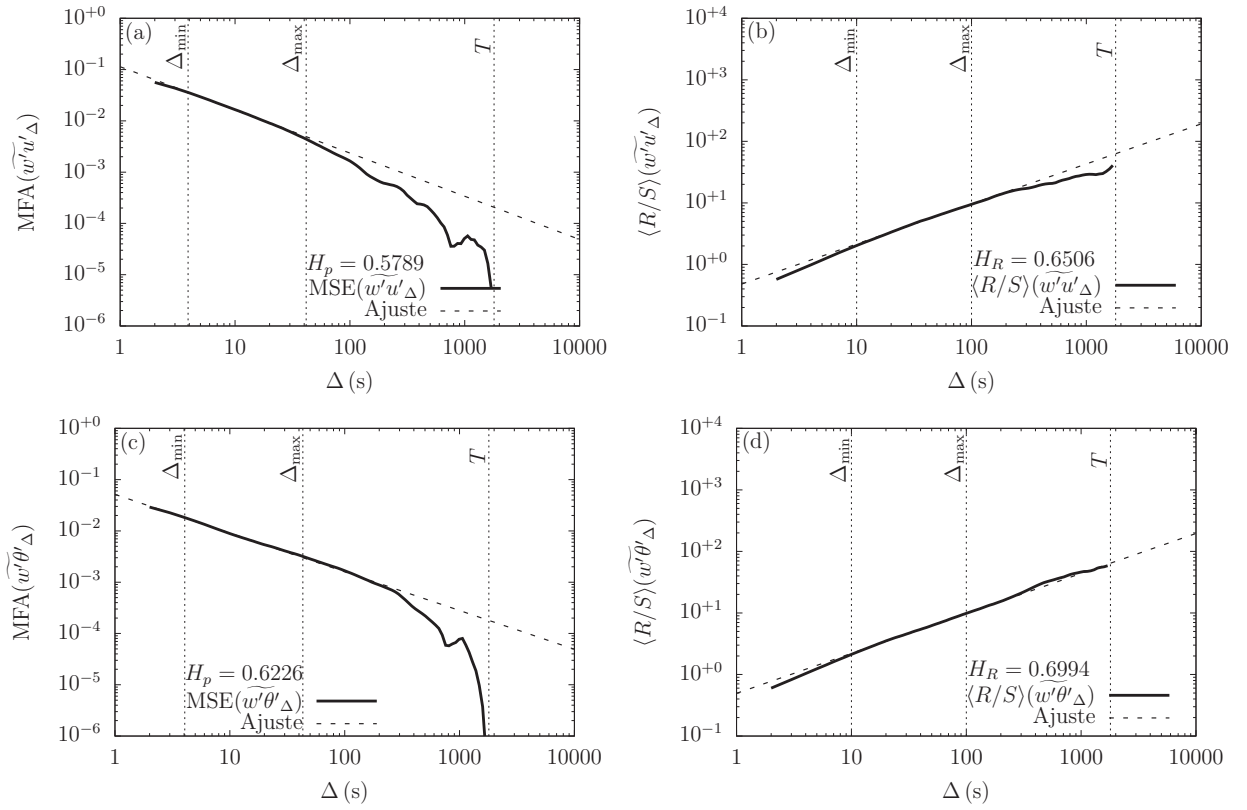


Figura 6.6: Exemplos da estimativa de utilizando o MFA ( $H_p$ ) e por R/S ( $H_R$ ) para os dados de segunda ordem – covariâncias ( $w'u'$  e  $w'\theta'$ ) de Tijucas do Sul medidos em 18/02/2011 entre 15:50h e 16:20h.

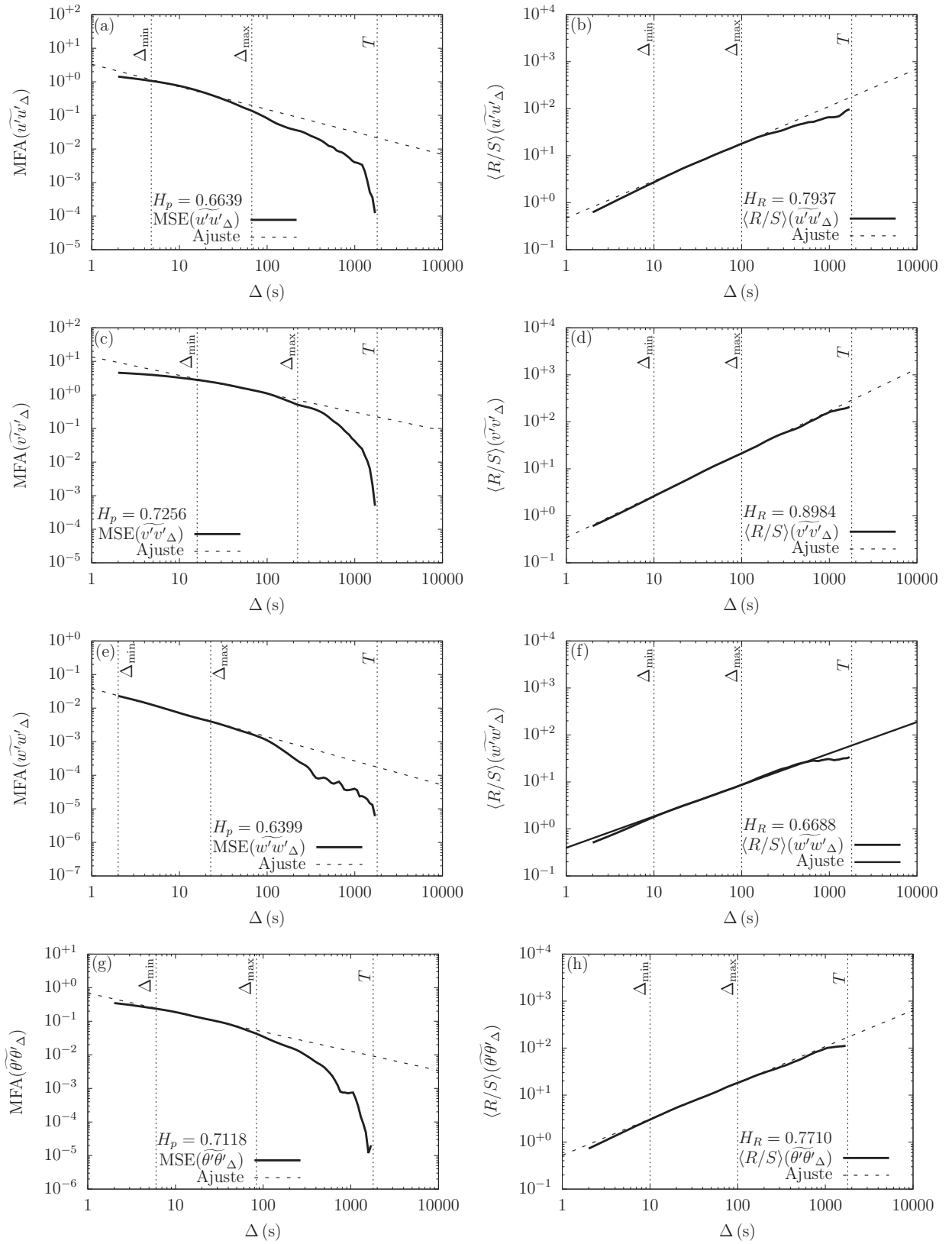


Figura 6.7: Exemplos da estimativa de  $H$  utilizando o MFA e o R/S para os dados de segunda ordem – variâncias ( $u'u$ ,  $v'v$ ,  $w'w$  e  $\theta'\theta$ ) de Tijucas do Sul medidos em 18/02/2011 entre 15:50 e 16:20h.

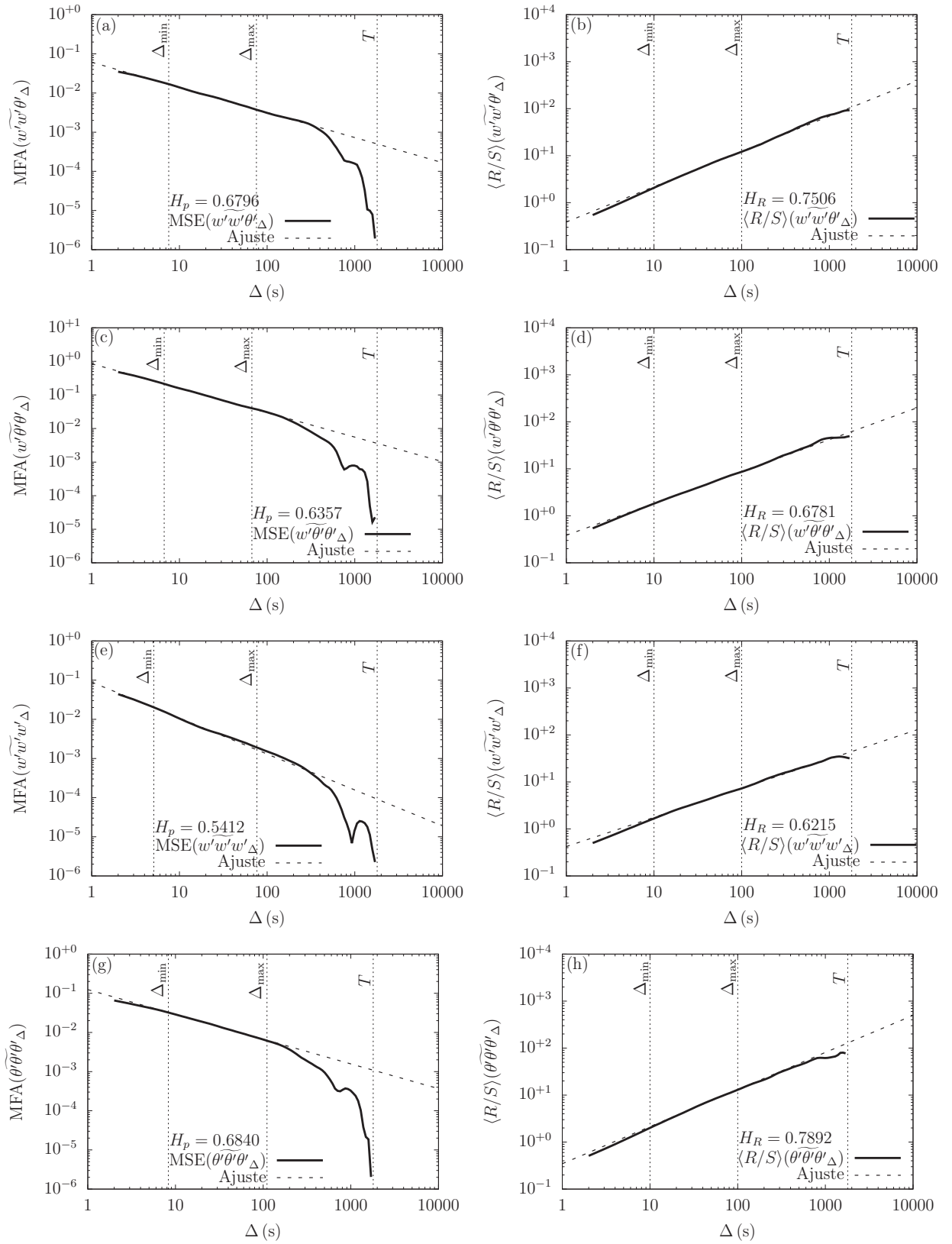


Figura 6.8: Exemplos da estimativa de  $H$  utilizando o MFA e o R/S para os dados de terceira ordem ( $w'w'\theta'$ ,  $w'\theta'\theta'$ ,  $w'w'w'$  e  $\theta'\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul medidos em 18/02/2011 entre 15:50 e 16:20h.

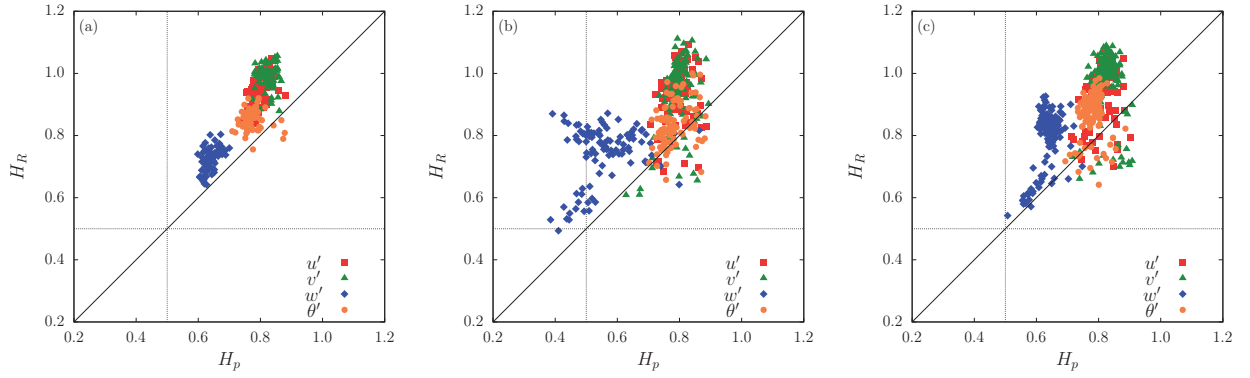


Figura 6.9: Comparação do expoente de Hurst estimado por MFA ( $H_p$ ) e por R/S ( $H_R$ ) para as flutuações de primeira ordem ( $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  e  $\theta'$ ): (a) Tijucas do Sul, (b) Missal e (c) AHATS.

apresentam valores mais próximos de  $1/2$  se comparados com as outras variáveis, e que Missal apresenta um maior espalhamento nos valores de  $H$ . Analisando a Figura 6.10 notamos que os valores de  $H$  para as covariâncias são mais próximos de  $1/2$  que para as variâncias. Analisando os gráficos (a), (b) e (c) da Figura 6.11 verificamos um espalhamento mais ou menos uniforme para todas as variáveis, e por fim analisando os gráficos (d) e (e) e (f) é possível verificar que a variável  $w'w'w'$  apresenta valores mais próximos de  $1/2$ , e que, principalmente para Missal, algumas estimativas de  $H_p$  apresentam valores menores que  $1/2$ .

Outra questão também foi avaliar o comportamento do expoente de Hurst para primeira, segunda e terceira ordem de uma mesma flutuação (por exemplo  $u'$ ,  $u'u'$  e  $u'u'u'$ ). O resultado encontrado pode ser visto na Figura 6.12. Nota-se que, com exceção da variável  $w$ , as flutuações de primeira ordem apresentam valores de  $H_p$  maiores se comparados com as outras ordens. Para a variável  $v$ , também é possível notar que  $H_p$  é menor para  $v'v'$  do que para  $v'v'v'$ . Para as estimativas de  $H_R$  temos que, independente da ordem da flutuação turbulenta, os valores são semelhantes.

Em resumo, as análises apresentadas nesta seção mostram que praticamente todos os casos analisados apresentam o fenômeno de Hurst ( $H > 1/2$ ). E como já verificado em outros campos de estudo, os estimadores MFA e R/S são diferentes, com a tendência (em turbulência) dos valores de  $H_R$  serem maiores que os de  $H_p$ .



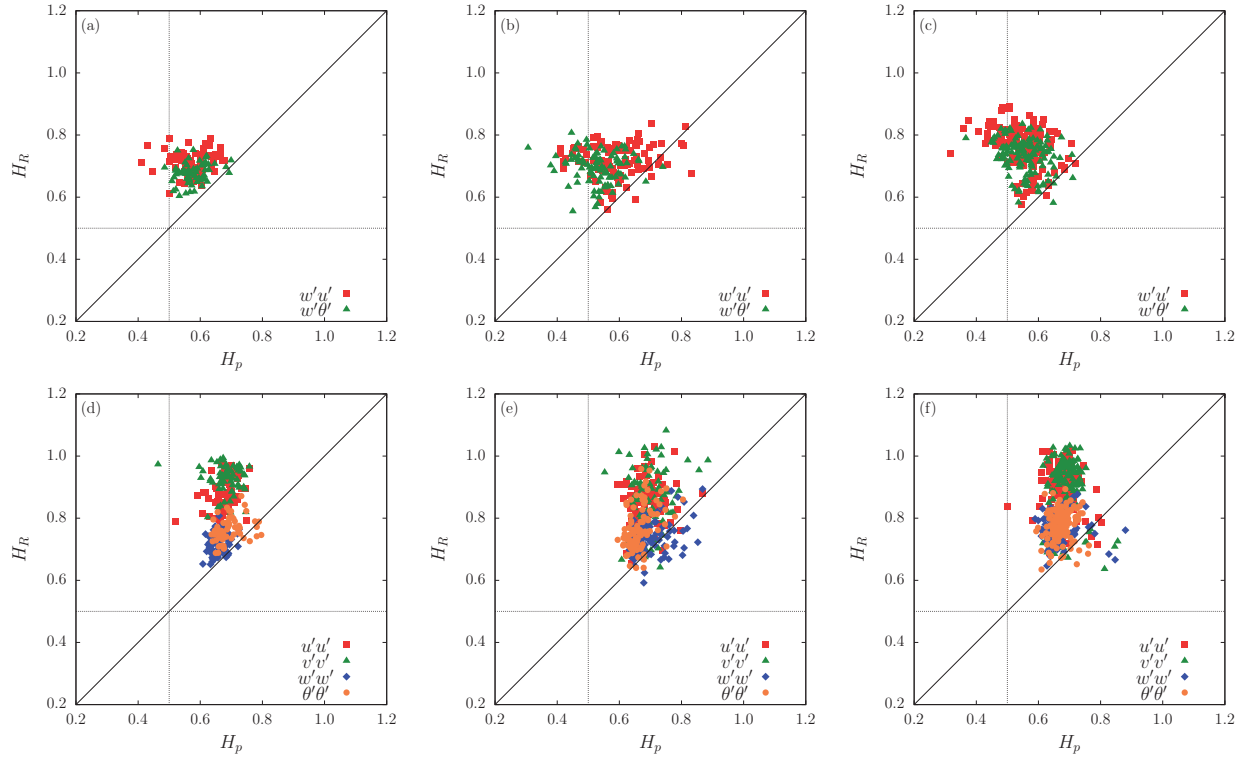


Figura 6.10: Comparação do expoente de Hurst estimado por MFA ( $H_p$ ) e por R/S ( $H_R$ ) para as flutuações de segunda ordem de Tijucas do Sul, Missal, e AHATS respectivamente, (a), (b) e (c) covariâncias –  $w'u'$  e  $w'\theta'$ , e (d), (e) e (f) variâncias –  $u'u'$ ,  $v'v'$ ,  $w'w'$  e  $\theta'\theta'$ .

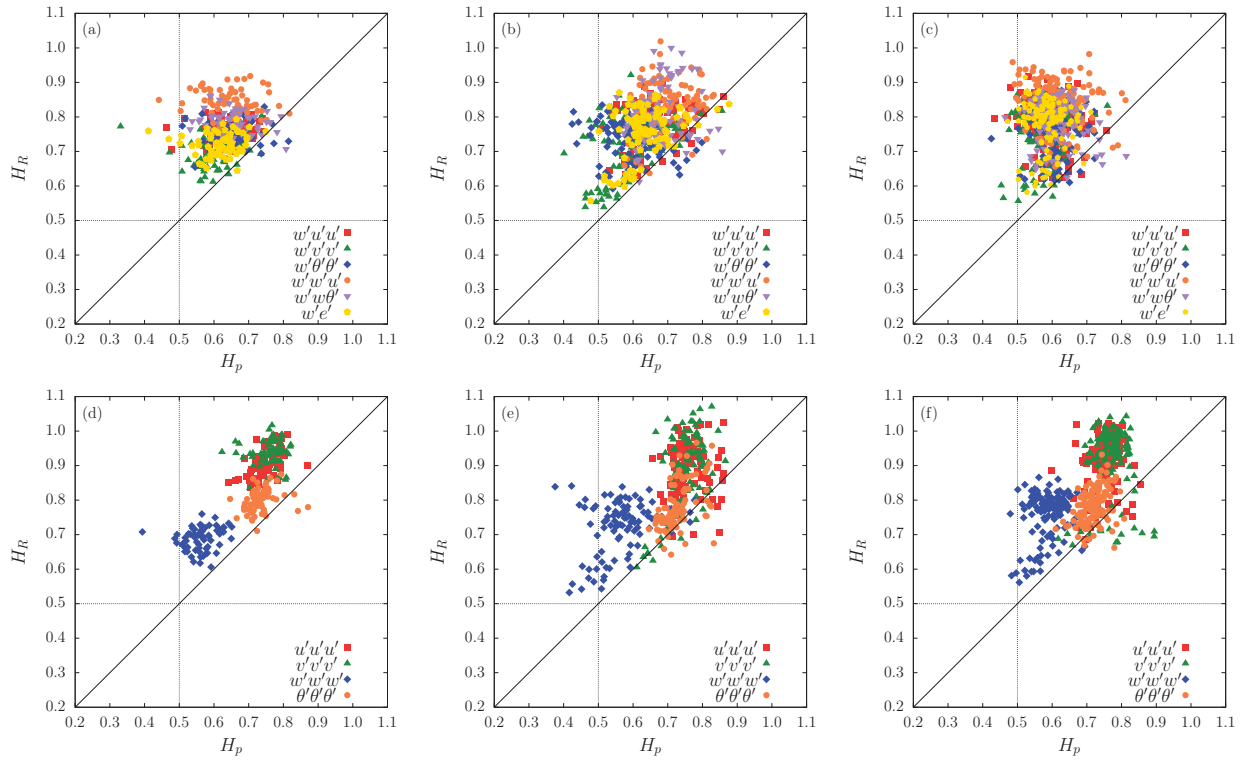


Figura 6.11: Comparação do expoente de Hurst  $H$  estimado por MFA ( $H_p$ ) e por R/S ( $H_R$ ) para as flutuações de terceira ordem de Tijuca do Sul, Missal e AHATS, respectivamente, (a), (b), (c) momentos de terceira ordem diferentes –  $w'u'u'$  e  $w'v'v'$ , e (d), (e), e (f) momentos de terceira ordem uniformes –  $u'u'u'$ ,  $v'v'v'$ ,  $w'w'w'$  e  $\theta'\theta'\theta'$ .

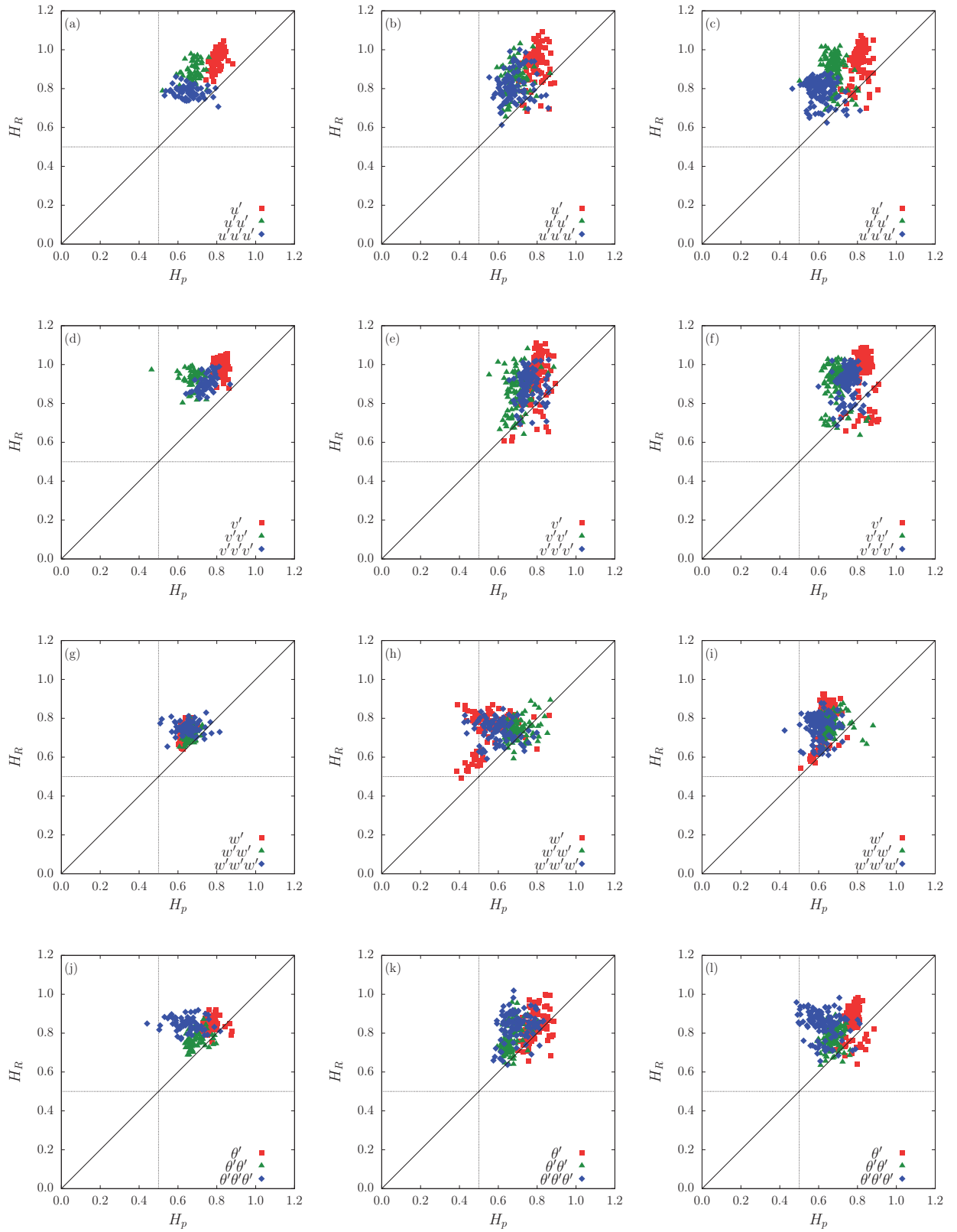


Figura 6.12: Análise do expoente de Hurst para diferentes ordens de uma mesma flutuação: (a), (d), (g), (j) Tijucas do Sul, (b), (e), (h), (k) Missal e (c), (f), (i), (l) AHATS.

## 6.4 Implicação do fenômeno de Hurst na estimativa de erros aleatórios

Nesta seção analisaremos qual a implicação do fenômeno de Hurst na estimativa de erros aleatórios. Os erros apresentados no decorrer desta seção são definidos por

$$\epsilon_{\tilde{x}} \equiv \frac{\text{RMSE}(\tilde{x}_{\Delta})}{\bar{x}}, \quad (6.2)$$

onde  $\epsilon_{\tilde{x}}$  representa o erro relativo e RMSE é a raiz do erro médio quadrático

$$\text{RMSE}(\tilde{x}_{\Delta}) = \sqrt{\text{MSE}(\tilde{x}_{\Delta})}. \quad (6.3)$$

Como as flutuações de terceira ordem possuem médias muito pequenas, gerando erros relativos grandes, além de estimarmos  $\epsilon_{\tilde{x}}$  utilizando (6.2), também estimamos o  $\epsilon_{\tilde{x}_d}$ , o qual ao invés de ser normalizado pela média é normalizado pelo desvio-padrão referente a cada flutuação de primeira ordem que gerou a flutuação de terceira ordem. Por exemplo, o RMSE da variável  $w'w'u'$  é normalizado por  $\sigma_{w'}\sigma_w\sigma_{u'}$ .

Para verificarmos quais os efeitos do fenômeno de Hurst na estimativa dos erros aleatórios, compararemos as seguintes estimativas de  $\text{RMSE}(\tilde{x}_{\Delta})$ :

1. A estimativa clássica prosta por [Lumley e Panofsky \(1964\)](#) – equação (2.18). Neste caso existe o problema da estimativa da escala integral, e por simplicidade a calcularemos considerando a área da função de autocorrelação até o primeiro cruzamento no eixo das abcissas ([Sreenivasan et al., 1978](#); [Lenschow e Stankov, 1986](#); [Katul e Parlange, 1995](#); [Salesky et al., 2012](#)). Na sequência deste trabalho iremos referenciar este método pela sigla LP.
2. A estimativa proposta por [Salesky et al. \(2012\)](#) chamada de Método de Filtragem. Para a obtenção do RMSE é necessário: forçar  $p = 1$  na equação (2.19), extrapolar a reta ajustada até  $\Delta = T$ , e extrair a raiz quadrada do MSE. Por simplicidade, no decorrer deste trabalho iremos nos referir a este método como MF.
3. A estimativa proposta neste trabalho, na qual o erro aleatório é estimado levando em consideração o fenômeno de Hurst. Neste caso utiliza-se a equação (2.19), sendo que  $p$  deve ser ajustado para cada caso. As próximas etapas para a estimativa do RMSE são as mesmas descritas para o caso anterior: extrapolar a reta ajustada até  $\Delta = T$ , e extrair a raiz quadrada do MSE. Este método será referenciado como MFA.

As três estimativas descritas acima foram comparadas, duas a duas, e o resultado encontrado para Tijucas do Sul está apresentado nas Figuras: 6.13 – flutuações de primeira

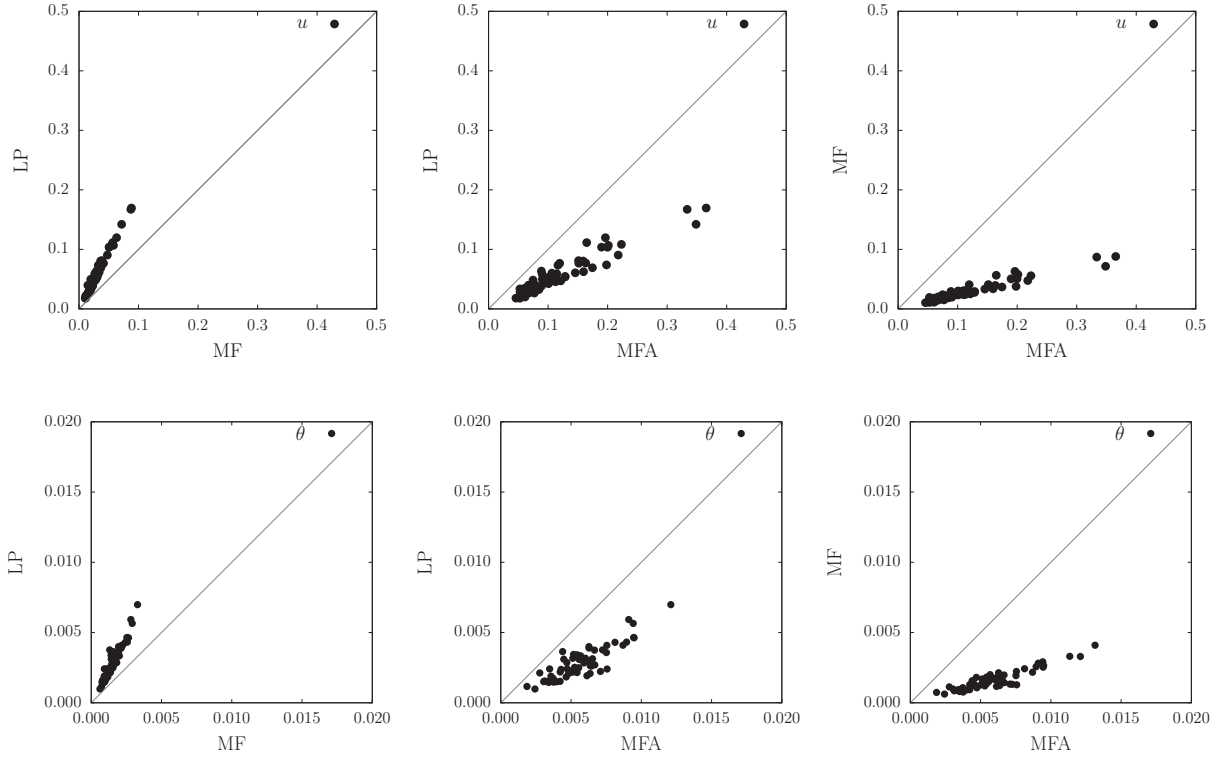


Figura 6.13: Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao  $\text{RMSE}(\hat{x}_{\Delta})$  para primeira ordem ( $u'$  e  $\theta'$ ) de Tijucas do Sul.

ordem; 6.14 e 6.15 – flutuações de segunda ordem, respectivamente, para as covariâncias e as variâncias. Para as flutuações de terceira ordem os resultados referentes aos erros relativos podem ser encontrados nas Figuras 6.16, 6.17 e 6.18, e para os erros normalizados pelo desvio-padrão nas Figuras 6.19, 6.20 e 6.21. Os resultados para Missal e AHATS são muito semelhantes aos de Tijucas do Sul e não serão apresentados neste trabalho.

Os casos em que a função de autocorrelação não cruza o eixo  $x$  foram removidos (Figuras 6.13, 6.14, 6.15, 6.16, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20, 6.21), sugerindo a não existência da escala integral. Claramente, este é um problema da estimativa LP, e não influencia os outros métodos, pois eles não dependem, *a priori*, da estimativa da escala integral. No entanto, quando a escala integral existe numericamente, temos os seguintes casos na comparação das estimativas de LP com as de MF: (i) para as flutuações de primeira ordem, os erros da estimativa de LP são maiores que os da estimativa de MF; (ii) para as flutuações de segunda ordem os erros da estimativa LP são maiores que os da estimativa MF para as variâncias, enquanto que para as covariâncias as estimativas dos dois métodos são mais próximas; e (iii) para as flutuações de terceira ordem os erros da estimativa LP são maiores que os da estimativa de MF para os casos:  $u'u'u'$ ,  $v'v'v'$  e  $\theta'\theta'\theta'$ ; já para o restante dos casos as estimativas de LP são mais próximas das estimativas de MF. Esse comportamento acontece

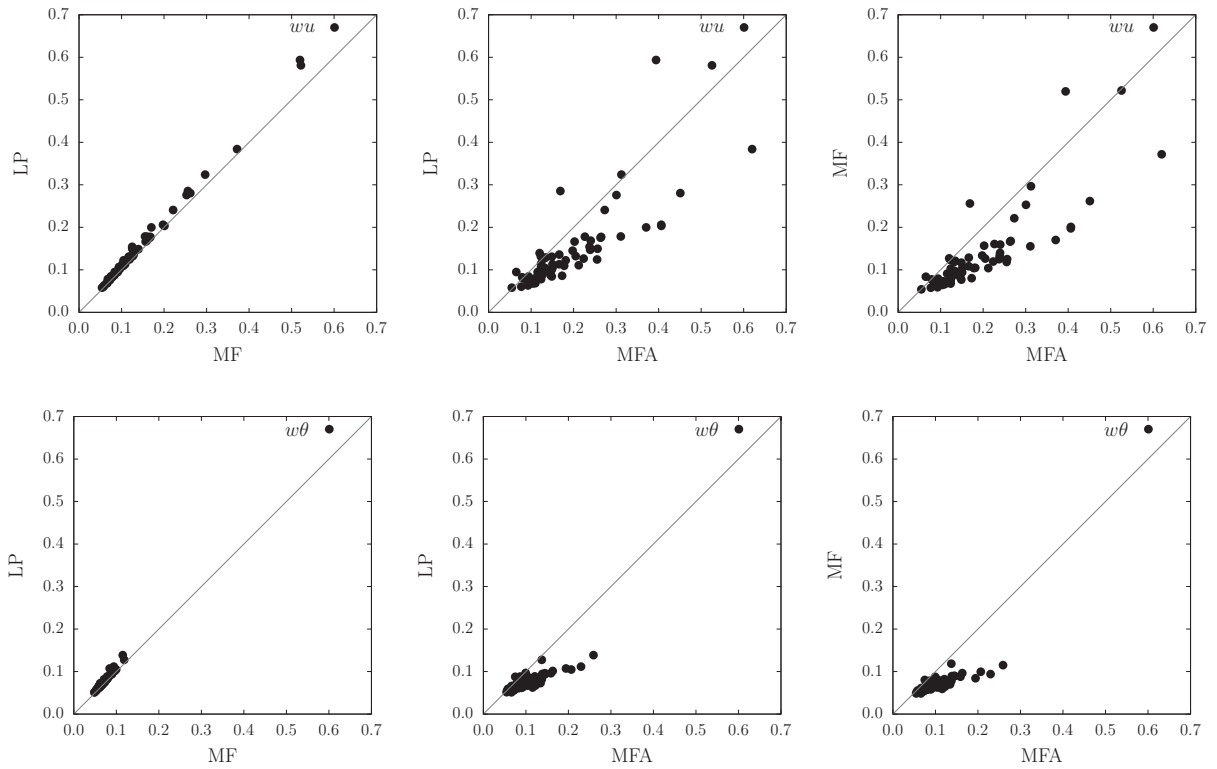


Figura 6.14: Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao  $\text{RMSE}(\tilde{x}_{\Delta})$  para segunda ordem – covariâncias ( $w'u'$  e  $w'\theta'$ ) de Tijucas do Sul.

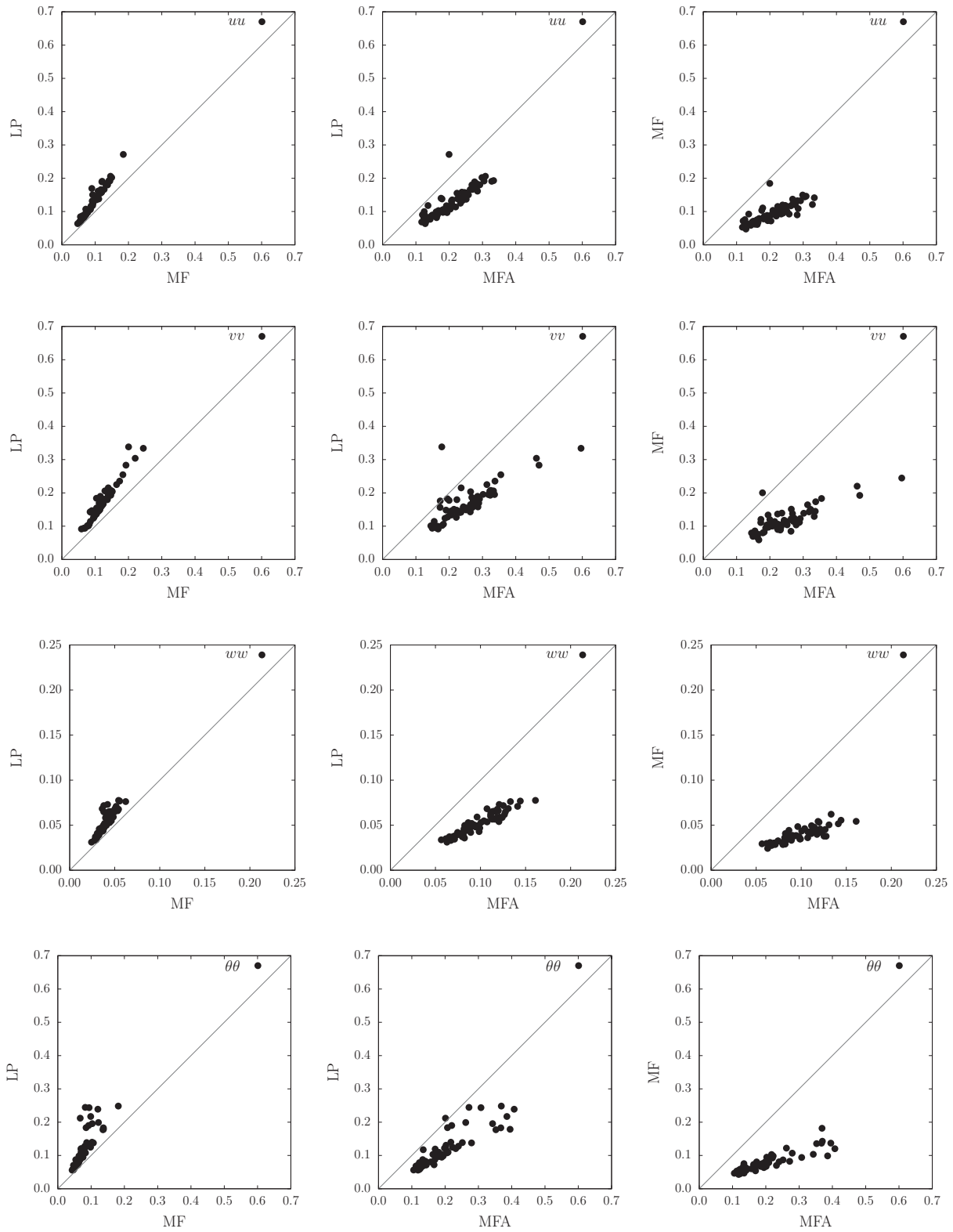


Figura 6.15: Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao  $\text{RMSE}(\tilde{x}_{\Delta})$  para segunda ordem – variâncias ( $u'u'$ ,  $v'v'$ ,  $w'w'$  e  $\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul.

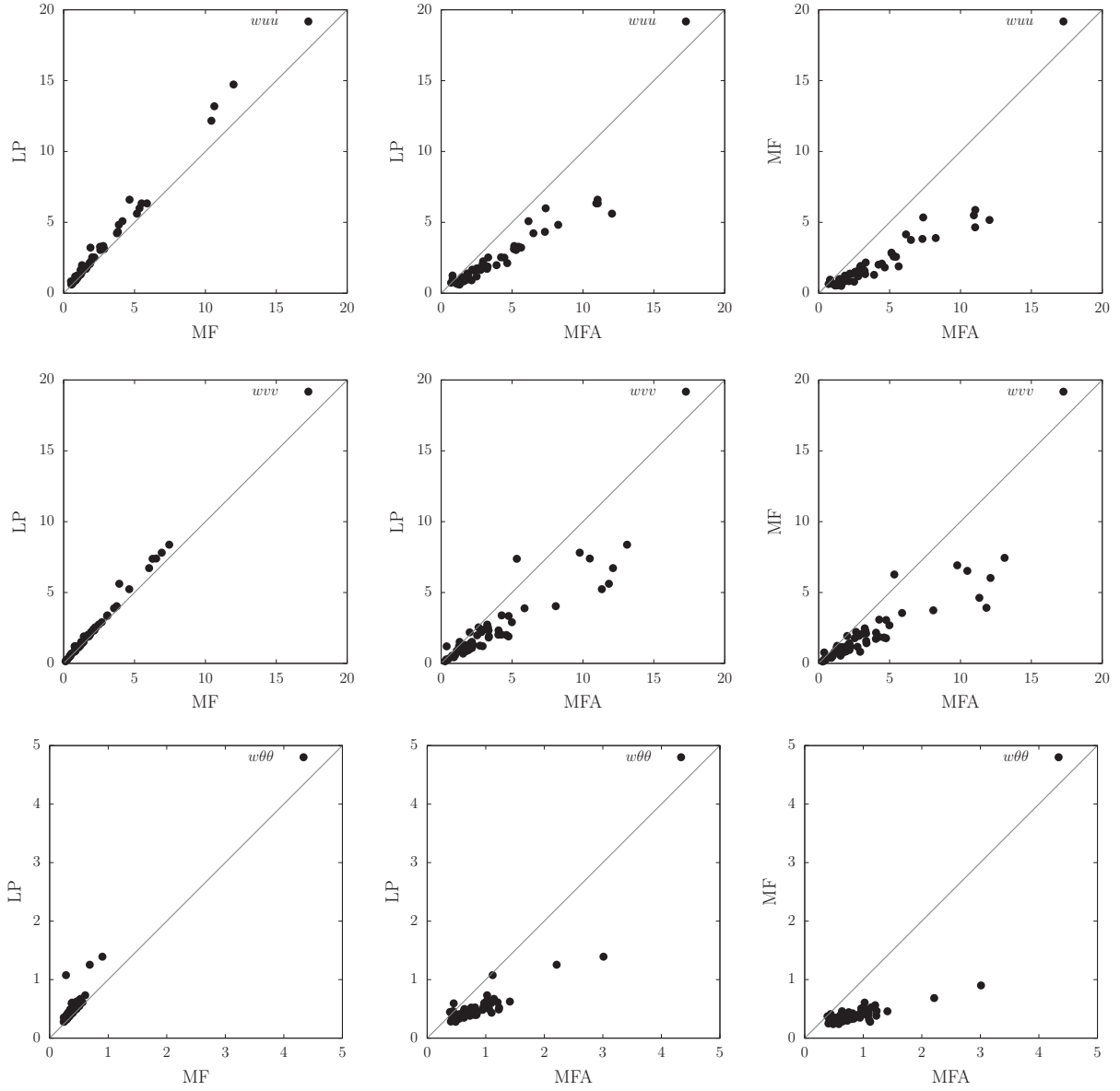


Figura 6.16: Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao  $\text{RMSE}(\hat{x}_{\Delta})$  para momentos de terceira ordem diferentes ( $w'u'u'$ ,  $w'v'v'$  e  $w'\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul.



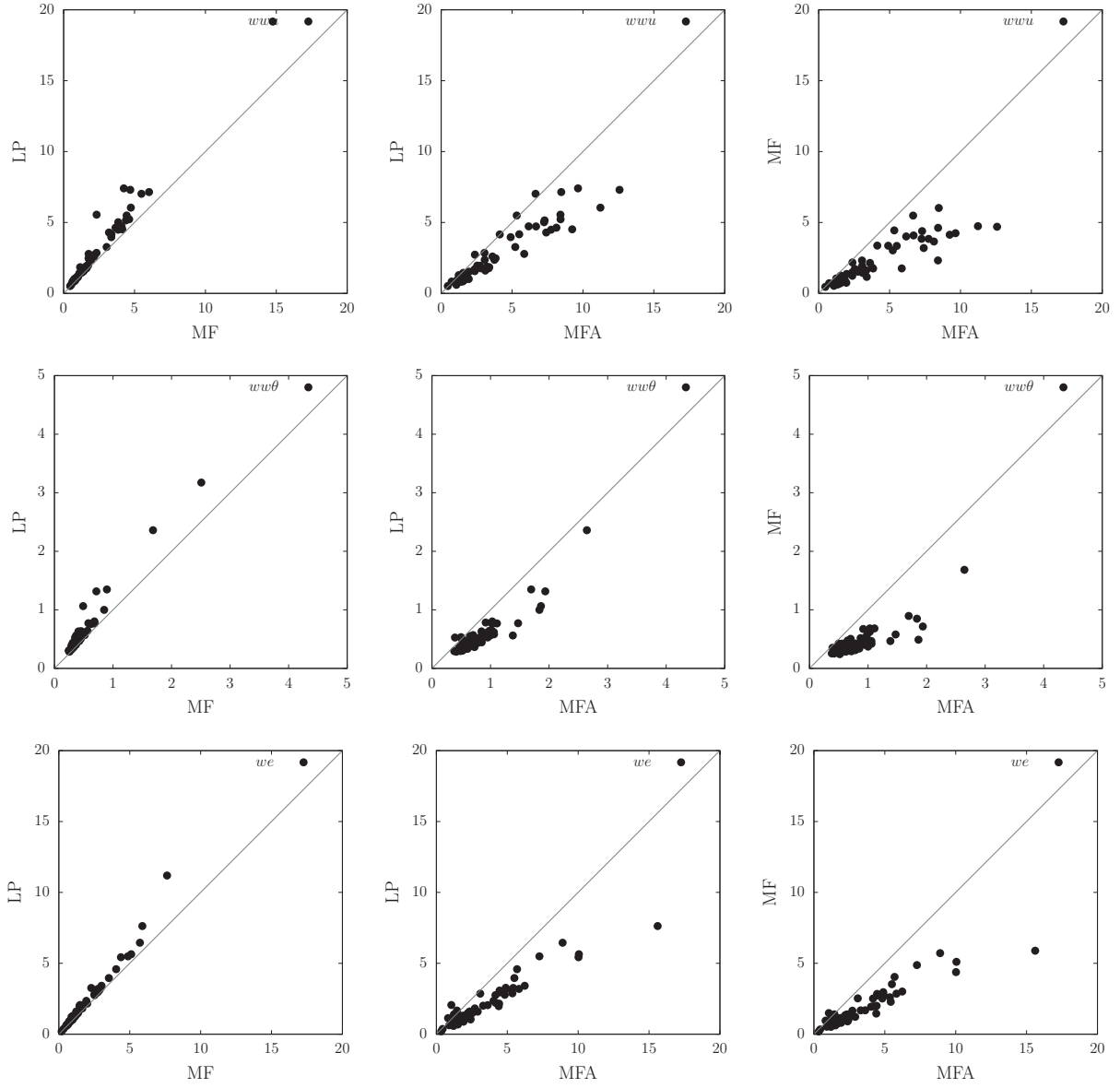


Figura 6.17: Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao  $\text{RMSE}(\widehat{x}_{\Delta})$  para momentos de terceira ordem diferentes ( $w'u'u'$ ,  $w'u'\theta'$  e  $w'e'$ ) de Tijucas do Sul.

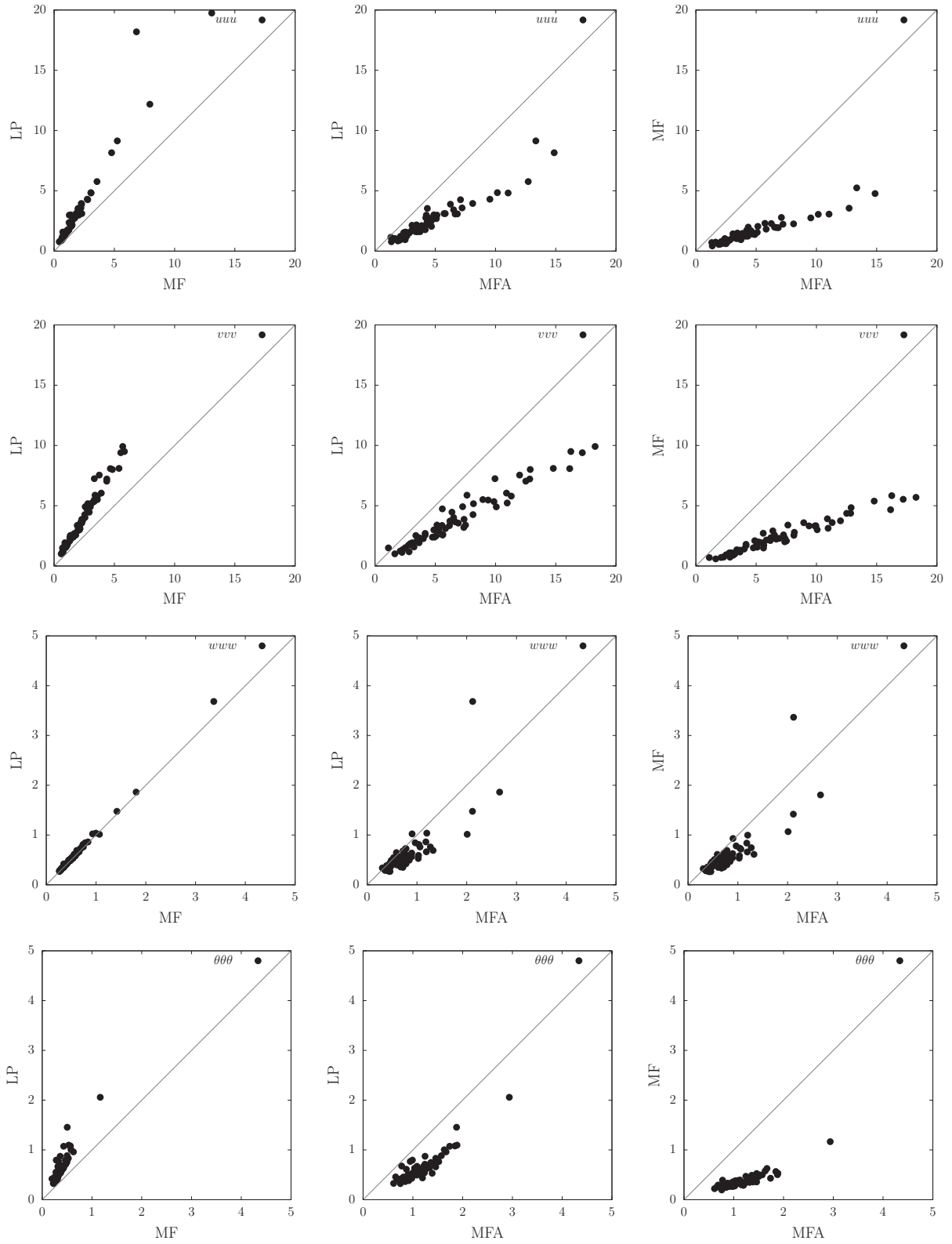


Figura 6.18: Comparação dos três métodos para estimativa do erro relativo referente ao  $\text{RMSE}(\tilde{x}_\Delta)$  para momentos de terceira ordem iguais ( $u'u'u'$ ,  $v'v'v'$ ,  $w'w'w'$  e  $\theta'\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul.

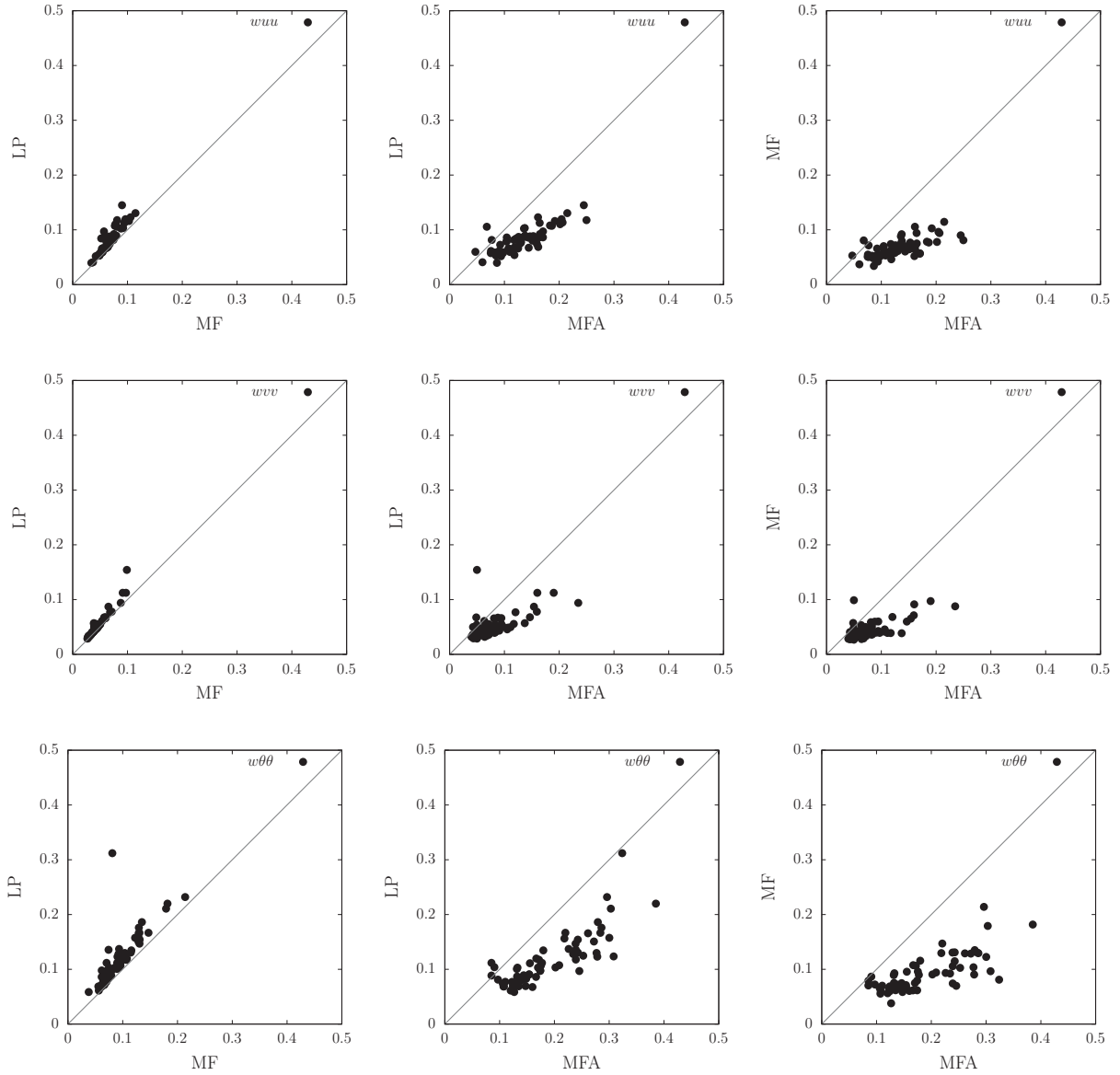


Figura 6.19: Comparação dos três métodos para estimativa do erro normalizado pelo desvio-padrão referente ao  $\text{RMSE}(\widehat{x}_{\Delta})$  para momentos de terceira ordem diferentes ( $w'u'u'$ ,  $w'v'v'$  e  $w'\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul.

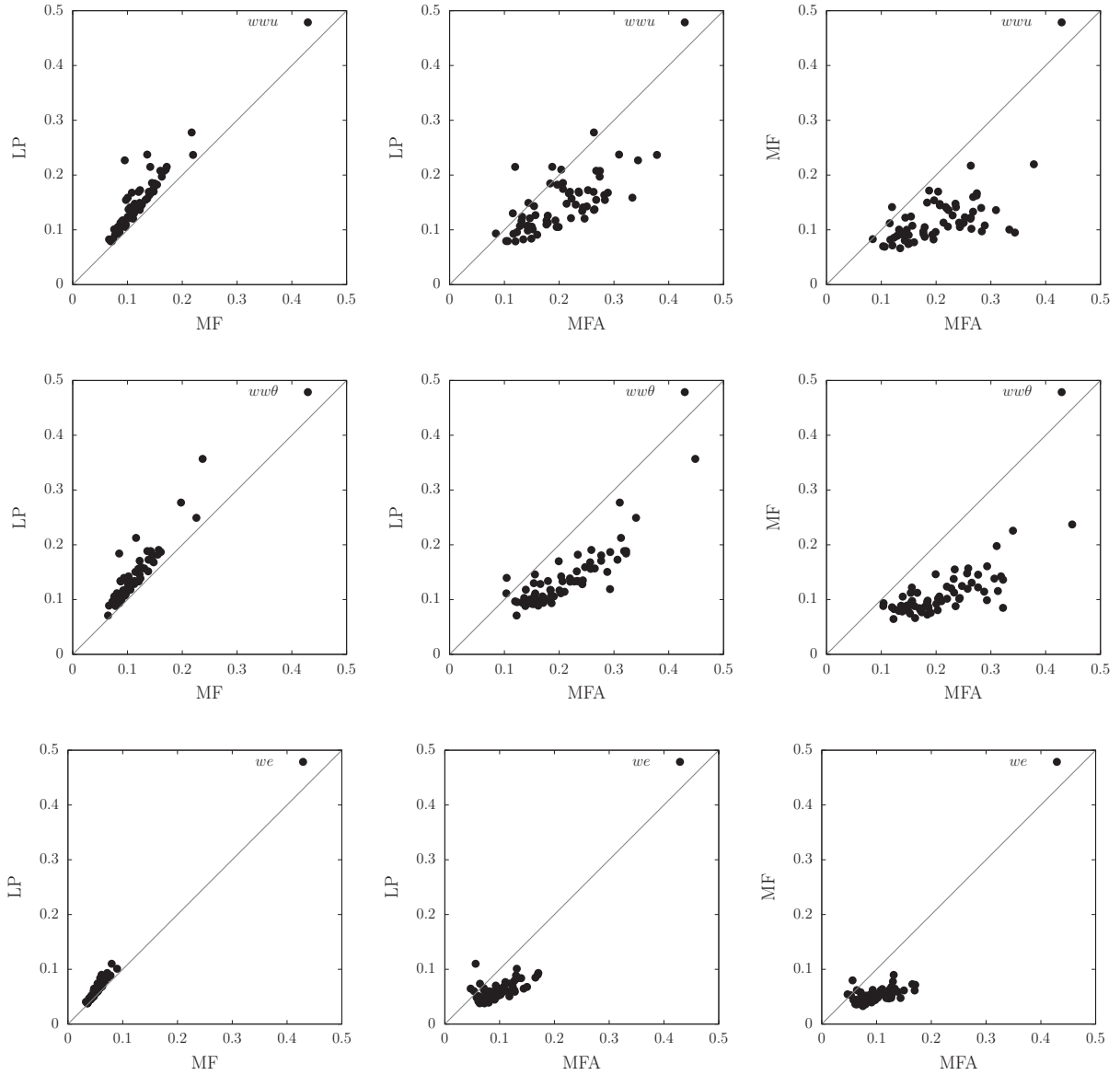


Figura 6.20: Comparação dos três métodos para estimativa do erro normalizado pelo desvio-padrão referente ao  $\text{RMSE}(\widetilde{x}_{\Delta})$  para momentos de terceira ordem diferentes ( $w'w'u'$ ,  $w'w'\theta'$  e  $w'e'$ ) de Tijucas do Sul.

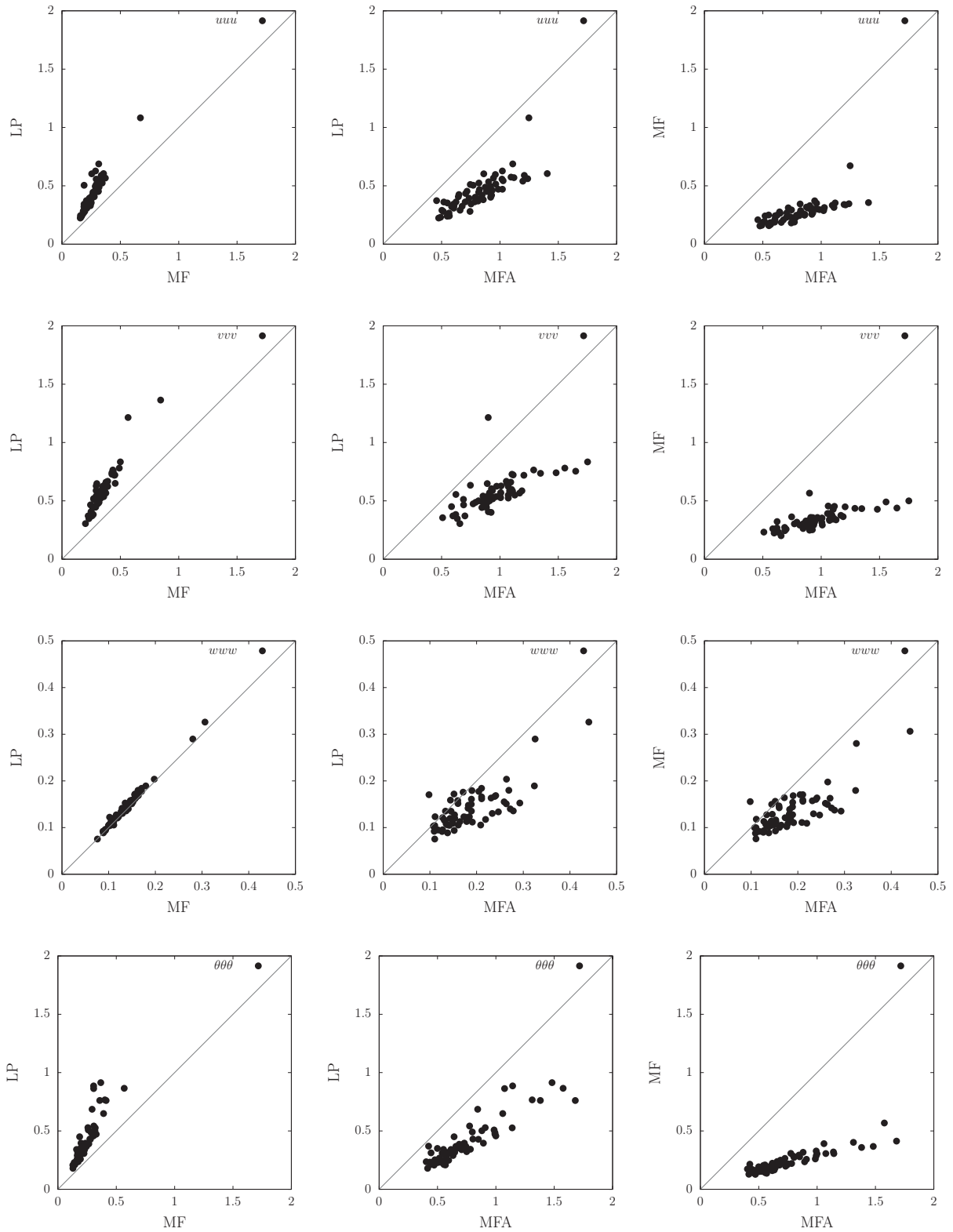


Figura 6.21: Comparação dos três métodos para estimativa do erro normalizado pelo desvio-padrão referente ao  $RMSE(\widehat{x}_{\Delta})$  para momentos de terceira ordem iguais ( $u'u'u'$ ,  $v'v'v'$ ,  $w'w'w'$  e  $\theta'\theta'\theta'$ ) de Tijucas do Sul.

tanto para o erro relativo, quanto para o erro normalizado pelo desvio-padrão.

Agora se analisarmos a comparação entre a estimativa de MFA, abordagem proposta neste trabalho a qual leva em consideração o fenômeno de Hurst e permite que o expoente  $p$  varie livremente para cada bloco, com a estimativa de LP, baseada no cálculo da escala integral, e com a estimativa MF, a qual fixa  $p = 1$ , vemos que, para todas as variáveis e independentemente da campanha, os erros da estimativa MFA são sistematicamente maiores que das estimativas LP e MF. Este resultado não é uma surpresa, pois para os casos que apresentam o fenômeno de Hurst a função MSE cai com um expoente mais lento que  $-1$  (valor do expoente para os casos que não apresentam o fenômeno de Hurst). Este comportamento, originado pela presença de memória de longo prazo nas séries de dados, faz com que sejam produzidas estimativas de erros maiores. Isto nos mostra que quando o fenômeno de Hurst está presente nas séries de dados, as estimativas tradicionais, as quais consideram a existência da escala integral, podem estar subestimando os erros.

Para verificarmos a relação entre as estimativas de LP e de MF com a estimativa de MFA calculamos a razão mínima, máxima e média entre as estimativas de erro (MFA/MF e MFA/LP) e a porcentagem média de subestimação. O resultado para a campanha de Tijucas do Sul está apresentado nas Tabelas 6.5 e 6.6. Analisando as tabelas é possível verificar que a razão MFA/MF é maior que a razão MFA/LP, e conseqüentemente, que a porcentagem de subestimação de MF é maior que a de LP. Isto não é um resultado novo, visto que já foi apresentado que os erros da estimativa de LP tendem a ser maiores que os erros da estimativa de MF e mais próximos da estimativa de MFA. Também é possível verificar que as razões entre as estimativas de erro e as porcentagens de subestimação são maiores para as flutuações de primeira ordem se comparadas com as outras flutuações analisadas. Isto acontece devido ao fato de que as flutuações de primeira ordem apresentam o fenômeno de Hurst de forma mais intensa, no sentido de maiores valores para  $H$ , se comparadas com as outras variáveis. O mesmo acontece para os dados da campanha de Missal e AHATS.

Por fim, para entendermos melhor a relação entre as estimativas de erro MFA e MF e o expoente de Hurst ( $H_p$ ), plotamos a razão MFA/MF versus  $H_p$  e os resultados encontrados para Tijucas do Sul, Missal e AHATS estão apresentados nas Figuras 6.22 – flutuações de primeira ordem, 6.23 – flutuações segunda ordem, 6.24 – flutuações terceira ordem. Analisando os gráficos é possível notar que quanto maior o expoente de Hurst maior é a razão entre as duas estimativas de erro, e como esperado, para  $H_p = 1/2$  a razão vale 1.

Tabela 6.5: Estatística das razões entre as estimativas de erros MFA/MF e MFA/LP para a campanha de Tijucas do Sul.

Variáveis	Razão MFA/MF			Razão MFA/LP		
	Mín	Máx	Média	Mín	Máx	Média
$u'$	2,72	5,27	4,06	1,48	3,06	2,17
$\theta'$	2,44	5,91	3,76	1,21	3,18	2,06
$w'u'$	0,66	2,18	1,50	0,59	2,05	1,38
$w'\theta'$	0,93	2,44	1,52	0,85	2,06	1,41
$u'u'$	1,08	3,13	2,23	0,74	2,01	1,65
$v'v'$	0,89	3,11	2,13	0,53	1,84	1,51
$w'w'$	1,93	3,38	2,51	1,57	2,30	1,90
$\theta'\theta'$	1,78	3,90	2,56	0,95	2,32	1,75
$w'u'u'$	0,84	3,08	1,98	0,64	2,36	1,63
$w'v'v'$	0,51	3,56	1,81	0,32	2,50	1,59
$w'\theta'\theta'$	1,04	4,00	2,10	0,76	2,53	1,67
$w'w'u'$	0,84	3,62	1,79	0,56	2,10	1,43
$w'w'\theta'$	1,11	3,80	1,96	0,75	2,46	1,55
$u'u'u'$	1,86	4,09	3,07	1,15	2,65	1,91
$v'v'v'$	1,59	3,88	2,89	0,74	2,40	1,74
$w'w'w'$	0,63	2,16	1,41	0,58	2,05	1,35
$\theta'\theta'\theta'$	1,97	4,14	3,18	1,14	2,72	1,91
$w'e'$	0,70	3,02	1,87	0,51	2,32	1,61

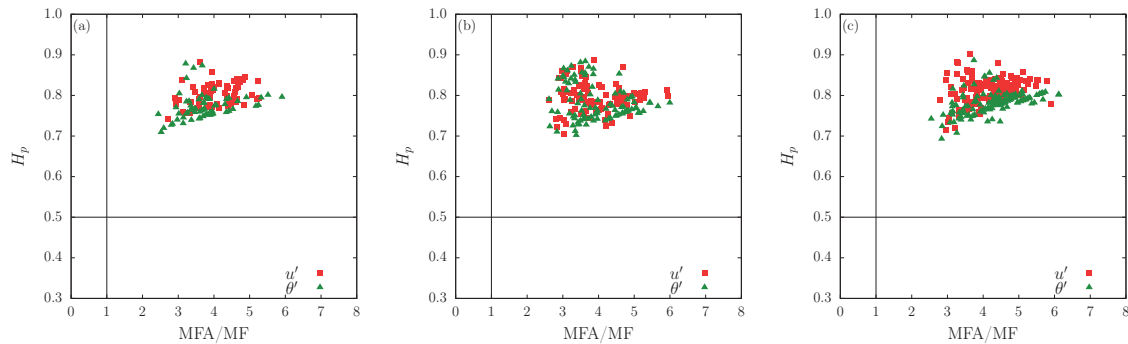


Figura 6.22: Razão entre as estimativas de erro MFA/MF versus o expoente de Hurst  $H_p$  para as flutuações de primeira ordem: (a) Tijucas do Sul; (b) Missal; e (c) AHATS.

Tabela 6.6: Porcentagem média de subestimação das estimativas de LP e MF em relação a estimativa MFA para a campanha de Tijucas do Sul.

Variáveis	% de subestimação de LP	% de subestimação de MF
$u'$	52,42	74,78
$\theta'$	49,28	72,52
$w'u'$	22,11	28,35
$w'\theta'$	26,10	31,45
$u'u'$	37,89	53,89
$v'v'$	31,43	51,43
$w'w'$	47,00	59,64
$\theta'\theta'$	41,12	60,00
$w'u'u'$	35,55	46,01
$w'v'v'$	29,84	39,09
$w'\theta'\theta'$	37,08	48,99
$w'w'u'$	25,45	39,81
$w'w'\theta'$	33,26	46,27
$u'u'u'$	46,11	66,61
$v'v'v'$	40,65	64,58
$w'w'w'$	21,70	25,44
$\theta'\theta'\theta'$	45,95	67,87
$w'e'$	33,11	42,54



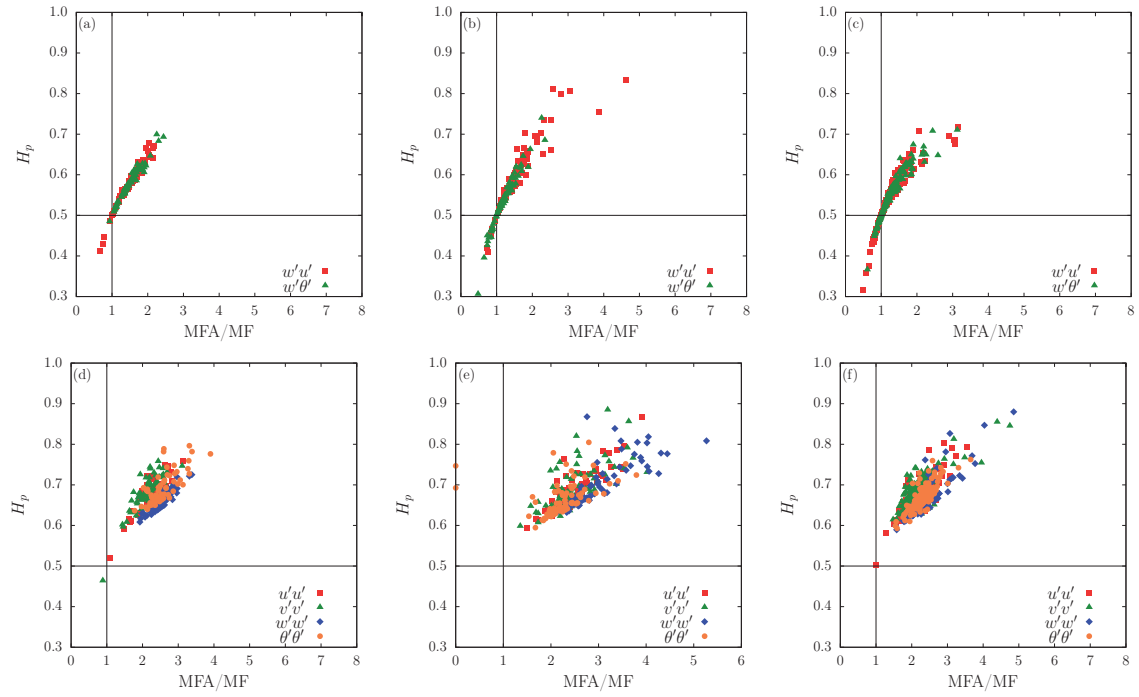


Figura 6.23: Razão entre as estimativas de erro MFA/MF versus o expoente de Hurst  $H_p$  para as flutuações de segunda ordem: (a) e (d) Tijuca do Sul; (b) e (e) Missal; e (c) e (f) AHATS.

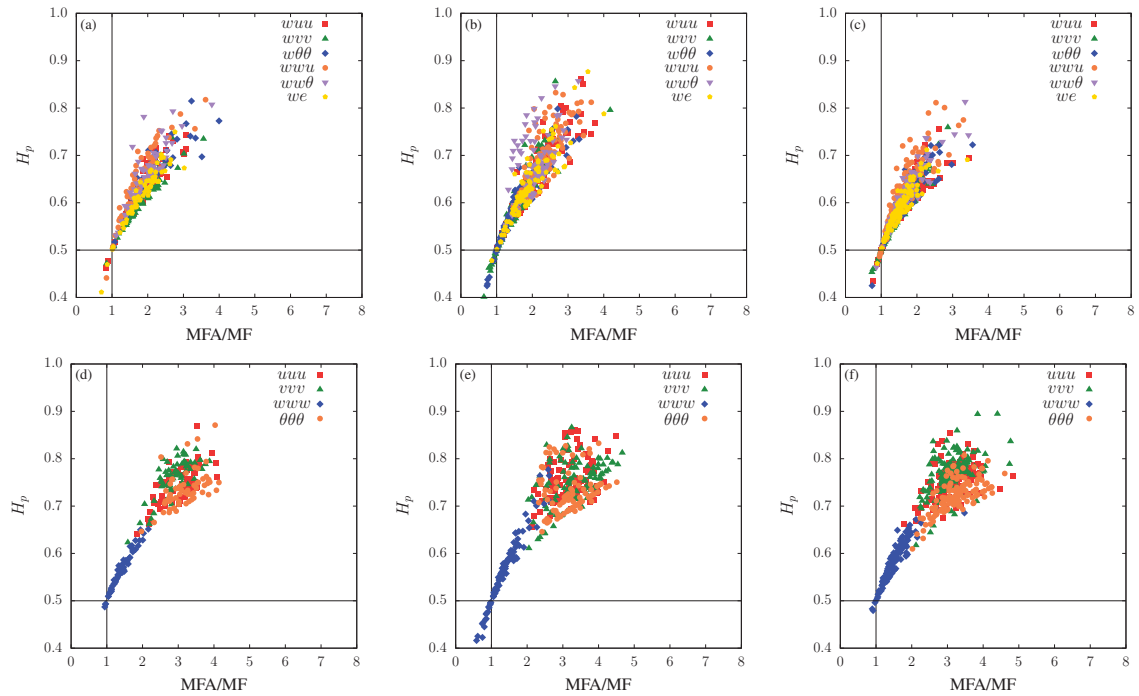


Figura 6.24: Razão entre as estimativas de erro MFA/MF versus o expoente de Hurst  $H_p$  para as flutuações de terceira ordem: (a) e (d) Tijuca do Sul; (b) e (e) Missal; e (c) e (f) AHATS.

## 6.5 Relações com a Teoria de Similaridade de Monin-Obukhov

A variável de estabilidade de Monin-Obukhov é dada por  $\zeta = z/L$  e indica a magnitude relativa da produção de energia cinética turbulenta por empuxo e por atrito. O comprimento de Obukhov ou escala de comprimento ( $L$ ) é definido por

$$L = -\frac{u_*^2 \overline{\theta_v}}{\kappa g \theta_{v*}}. \quad (6.4)$$

onde  $\kappa = 0,4$  é a constante de von Kármán,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\theta_v$  é a temperatura potencial,  $u_* = (\overline{w'u'})^{1/2}$  é a velocidade de atrito e  $\theta_{v*} = \overline{w'\theta'_v}/u_*$  é a escala turbulenta da temperatura potencial. Se  $\zeta = 0$  a estabilidade na camada superficial é neutra, já para  $\zeta > 0$  a camada superficial é estável e o empuxo ajuda a destruir a turbulência, e para  $\zeta < 0$  a camada superficial é instável e o empuxo produz turbulência.

Nesta seção analisaremos se existe alguma relação entre a Teoria de Similaridade de Monin-Obukhov (TSMO) e (i) o expoente de Hurst obtido pelos estimadores MFA e R/S ( $H_p$  e  $H_R$ ) e (ii) o erro relativo  $\epsilon$  obtido pelas estimativas MFA e MF.

Primeiramente analisaremos se existe alguma tendência do expoente de Hurst com relação a variável de estabilidade de Monin-Obukhov. Para esta análise plotamos  $H_p$  e  $H_R$  versus o logaritmo de  $\zeta$  para os dados de Tijucas do Sul, Missal e AHATS. O resultado para Missal está apresentado nas Figuras 6.25, 6.26 e 6.27, respectivamente para as flutuações de primeira, segunda, e terceira ordem.

Analisando os gráficos das Figuras 6.25, 6.26 e 6.27 vemos que visualmente não existe nenhuma relação entre o expoente de Hurst e a variável de estabilidade  $\zeta$ . Nota-se que há um espalhamento de  $H$  aproximadamente constante para toda faixa de estabilidade apresentada nos gráficos. Sabendo que a TSMO não leva em consideração as largas escalas associadas com a altura da camada-limite, o entranhamento dos fluxos, etc. (Salesky e Chamecki, 2012; Cancelli et al., 2014), questões que podem contribuir para o aparecimento do fenômeno de Hurst, este resultado já era esperado para as condições instáveis. E mesmo os casos que apresentam condições estáveis, quando a altura da camada limite atmosférica é muito menor,  $H$  continua não mostrando nenhuma dependência com  $\zeta$ .

Por outro lado, neste trabalho verificou-se que a estabilidade atmosférica tem efeito sobre as estatísticas de segunda ordem. Este comportamento pode ser observado na Figura 6.28. Já para as estatísticas de terceira ordem não se notou nenhuma relação com variável de estabilidade de Monin-Obukhov, como pode ser visto nas Figuras 6.29 (erro relativo) e 6.30 (erro normalizado pelo desvio-padrão). Nestas figuras foram plotados os erros relativos ou normalizados pelo desvio-padrão, calculados pela estimativa MFA e pela estimativa MF

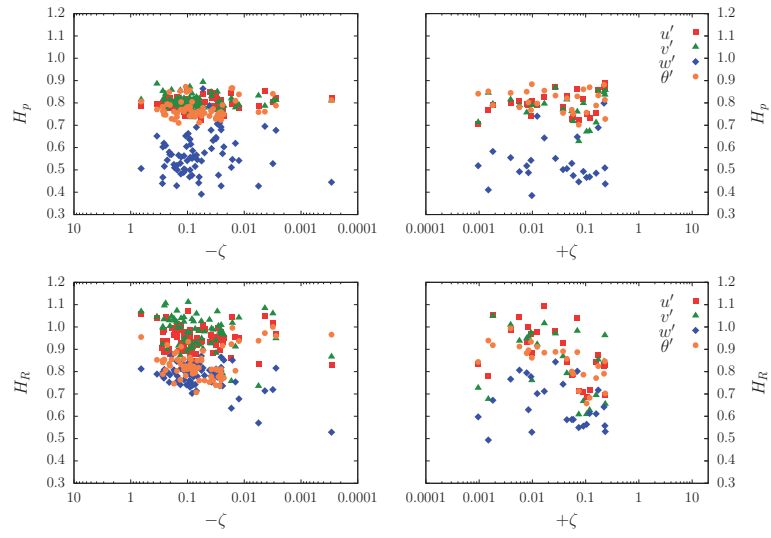


Figura 6.25: Comparação entre  $\zeta$  e o expoente de Hurst obtido pela estimativa MFA ( $H_p$ ) e pelo intervalo ajustado R/S ( $H_R$ ) para as flutuações turbulentas de primeira ordem da campanha de Missal.

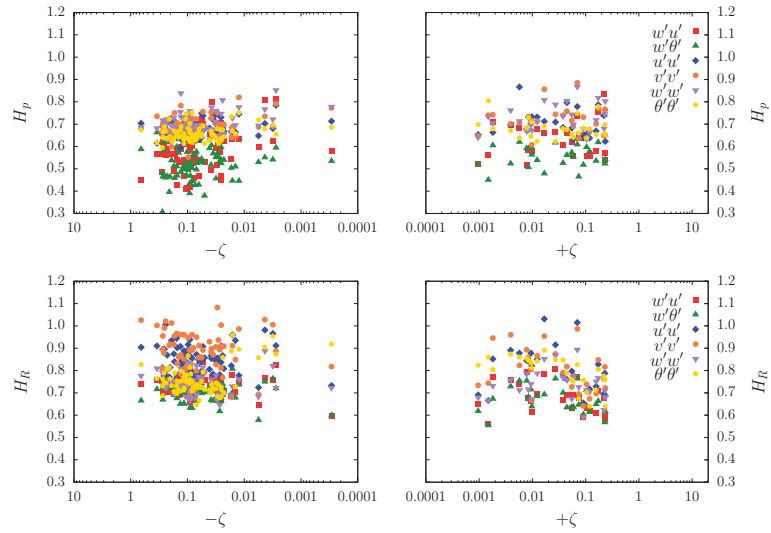


Figura 6.26: Comparação entre  $\zeta$  e o expoente de Hurst obtido pela estimativa MFA ( $H_p$ ) e pelo intervalo ajustado R/S ( $H_R$ ) para as flutuações turbulentas de segunda ordem da campanha de Missal.

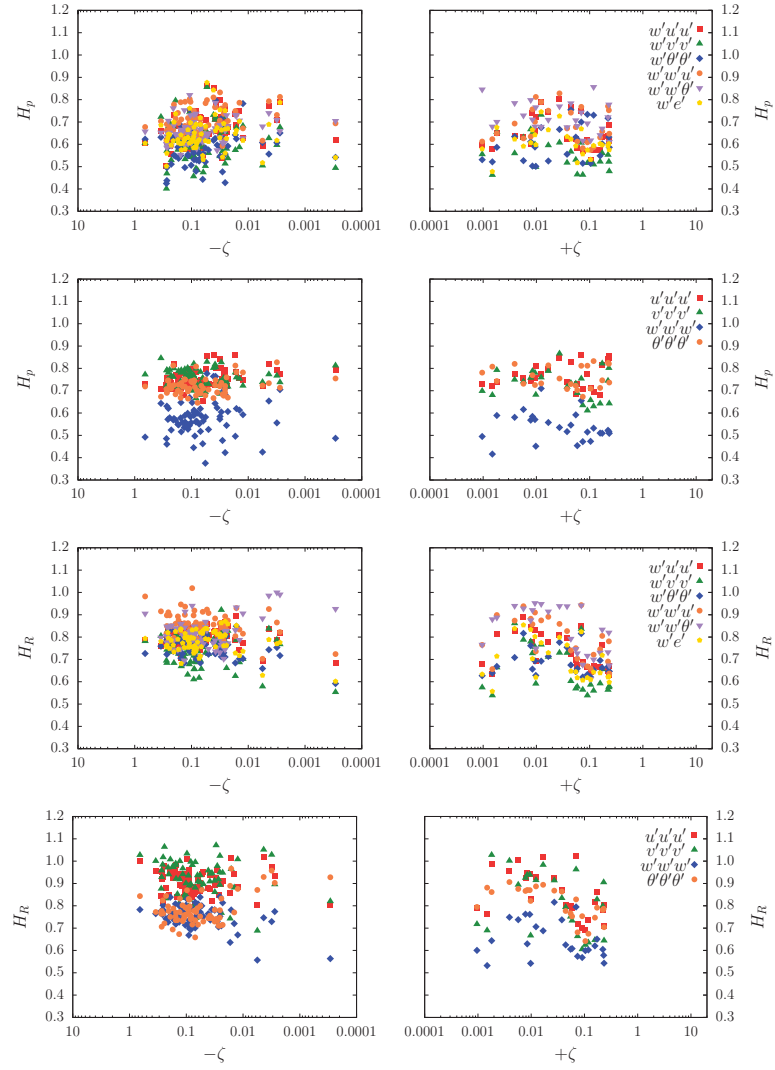


Figura 6.27: Comparação entre  $\zeta$  e o expoente de Hurst obtido pela estimativa MFA ( $H_p$ ) e pelo intervalo ajustado R/S ( $H_R$ ) para as flutuações turbulentas de terceira ordem da campanha de Missal.

*versus*  $\zeta$  para as estimativas referentes aos dados de primeira, segunda e terceira ordem. Os gráficos das Figuras 6.28, 6.29 e 6.30 são respectivamente: (a) e (b) Tijucas do Sul, (c) e (d) Missal e (e) e (f) AHATS.

Analisando os gráficos da Figura 6.28 nota-se que o erro relativo de  $w'u'$  depende de  $\zeta$  principalmente em condições instáveis. Este mesmo comportamento já foi verificado por Salesky et al. (2012). Nota-se que para a campanha AHATS, a qual possui valores de  $\zeta$  relacionados com maior instabilidade, a dependência é mais acentuada. Além disso, o erro relativo do fluxo de calor  $w'\theta'$  cresce relativamente com  $\zeta$  em condições estáveis quando utilizamos tanto a estimativa MFA quanto a estimativa MF para a campanha de Missal, como mostrado nos gráficos (c) e (d) da Figura 6.28. Este comportamento difere do apresentado por Salesky et al. (2012), onde apenas foi observada uma tendência positiva pequena para  $\zeta$  estável. Para condições neutras os erros de  $w'\theta'$  são indefinidos; devido a isso os pontos perto de  $\zeta = 0$  foram excluídos dos gráficos da Figura 6.28.

Analisando o restante dos erros, verificamos que estes permanecem constantes ou crescem suavemente em condições estáveis, ou seja, não apresentam nenhuma tendência significativa com  $\zeta$ . Note que Tijucas do Sul possui somente dados instáveis, enquanto que os dados de Missal e AHATS incluem condições neutras e estáveis, e neste sentido eles se completam, apresentando casos para toda a faixa de estabilidade. Conforme já se sabe, e pode-se novamente verificar nestes gráficos, o erro relativo obtido pela estimativa MFA é maior que o obtido pela estimativa MF.

Por outro lado, para as estatísticas de terceira ordem não é possível identificar nenhuma relação com  $\zeta$ . Analisando os gráficos das Figuras 6.29 e 6.30 é possível notar que as estimativas de erro do MFA de  $uuu$ ,  $vvv$  e  $\theta\theta\theta$ , principalmente para as estimativas de erros normalizados pelo desvio-padrão, são maiores se comparadas com as estimativas de erros das outras variáveis.

## 6.6 Resultados referentes a campanha Mahomet

Nesta seção serão apresentados os resultados referentes a campanha de Mahomet. Na primeira subseção serão apresentados os resultados referentes à estimativa do expoente de Hurst e à estimativa dos erros aleatórios e na segunda subseção será apresentada uma análise do comportamento do estimador R/S.

### 6.6.1 Análise do expoente de Hurst e da estimativa de erros

Nesta seção apresentaremos os resultados da estimativa do expoente de Hurst (MFA e R/S) e da estimativa de erros (MFA) para as séries de dados de  $u$ ,  $v$  e  $w$  da campanha de Mahomet. Primeiramente estimamos o expoente de Hurst utilizando o MFA e o R/S para

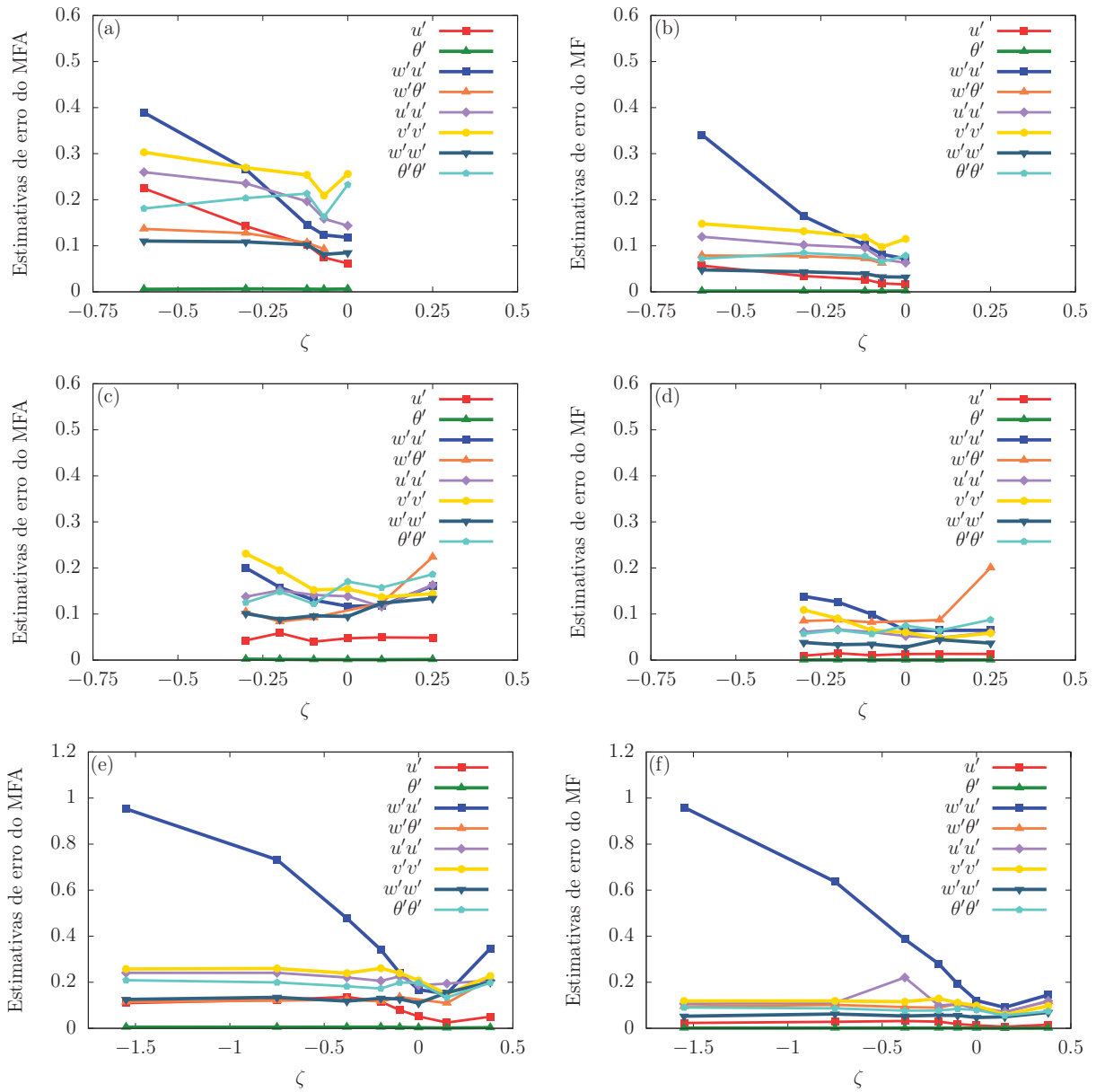


Figura 6.28: Erros relativos obtidos pelas estimativas MFA e MF promediados em blocos da variável de estabilidade de Monin-Obukhov para (a) e (b) Tijucas do Sul, (c) e (d) Missal e (e) e (f) AHATS.

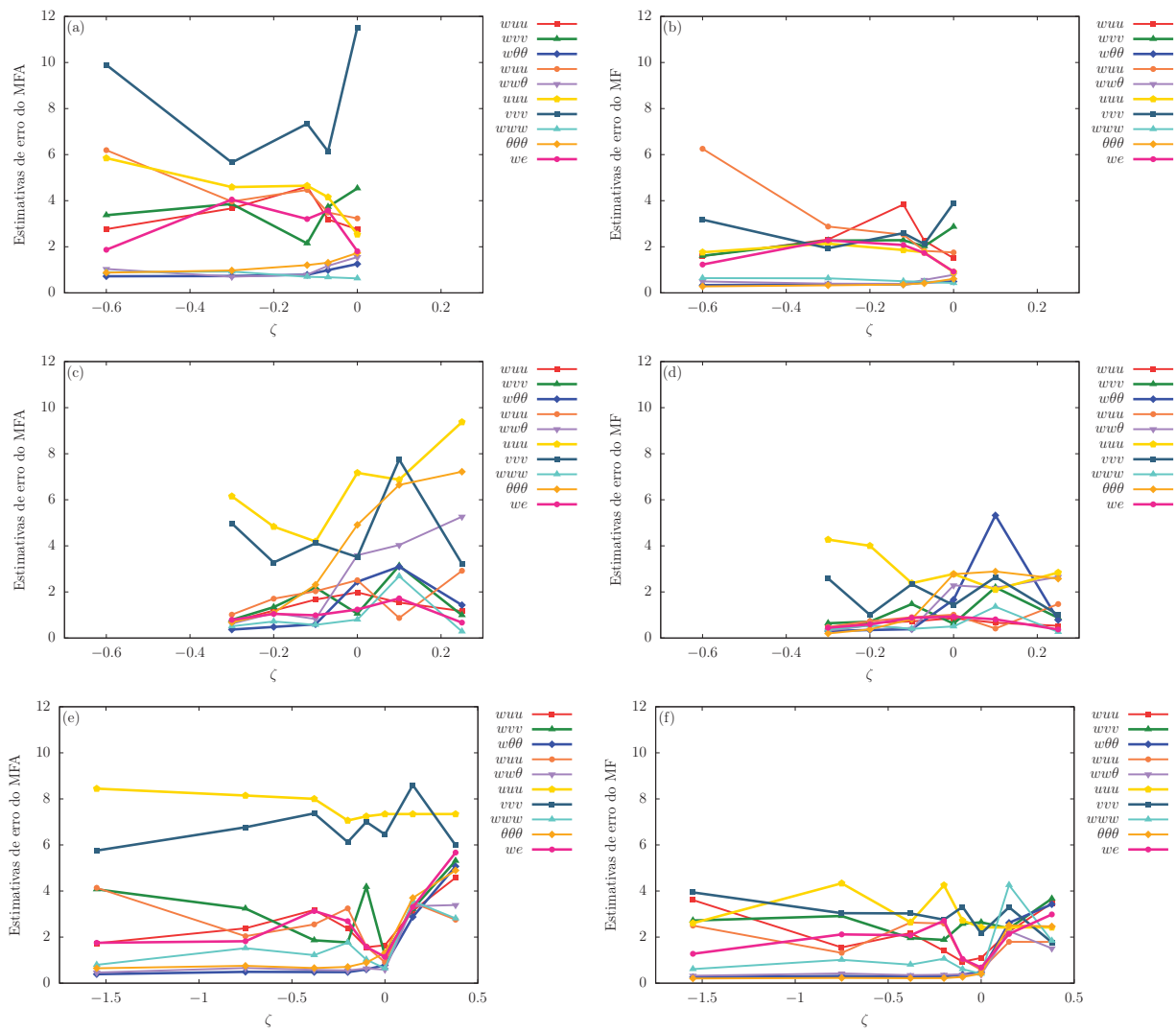


Figura 6.29: Erros relativos obtidos pelas estimativas MFA e MF promediados em blocos da variável de estabilidade de Monin-Obukhov para (a) e (b) Tijucas do Sul, (c) e (d) Missal e (e) e (f) AHATS.

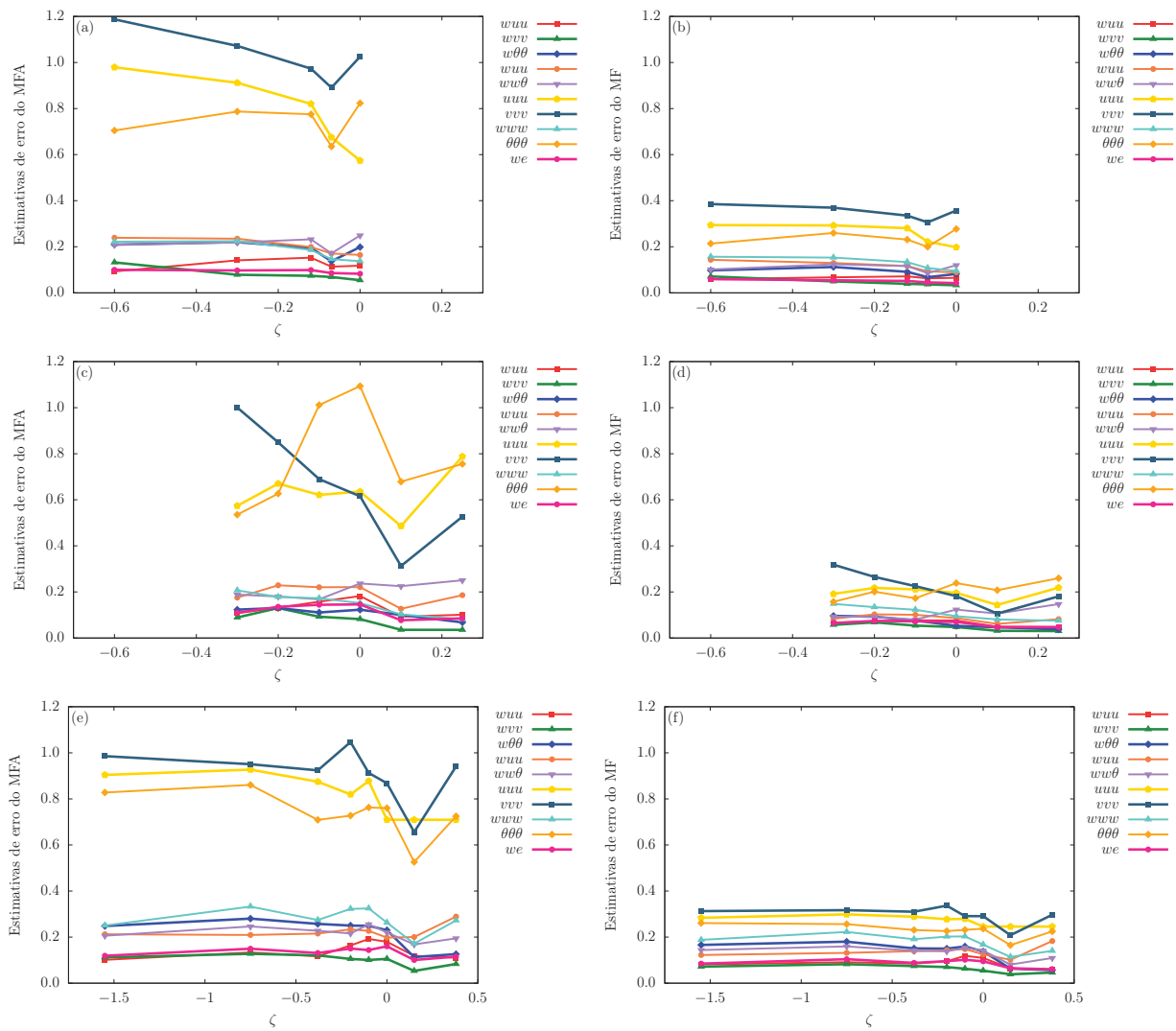


Figura 6.30: Erros normalizados pelo desvio-padrão obtidos pelas estimativas MFA e MF promediados em blocos da variável de estabilidade de Monin-Obukhov para (a) e (b) Tijucas do Sul, (c) e (d) Missal e (e) e (f) AHATS.



Tabela 6.7: Valores médios de  $H_p$  e  $H_R$  para os blocos de 30 minutos.

	$u$	$v$	$w$
Valor médio $H_p$	0,7667	0,8936	0,5296
Valor médio $H_R$	0,8121	0,8639	0,5849

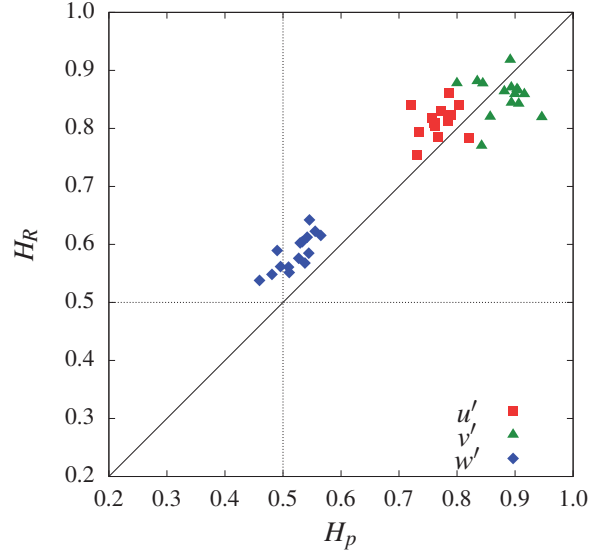


Figura 6.31: Comparação do expoente de Hurst estimado por MFA ( $H_p$ ) e por R/S ( $H_R$ ) para  $u$ ,  $v$  e  $w$  de Mahomet.

os 15 blocos de 30 minutos. O valor médio encontrado para o expoente de Hurst para cada variável está apresentado na Tabela 6.7 e a comparação entre os valores de  $H_p$  e  $H_R$  pode ser visto na Figura 6.31. Os limites utilizados para o ajuste dos dados foram previamente definido na Subseção 5.3.2.

Analisando estes resultados, vemos que o expoente de Hurst é maior que  $1/2$  para  $u$  e  $v$  e muito próximo de  $1/2$  para  $w$ . Para  $u$  e  $w$ , a estimativa média de  $H_R$  é maior que a de  $H_p$ , e para  $v$  acontece o contrário. Analisando o gráfico da Figura 6.31 é possível ver que a maioria dos  $H_p$ 's são maiores que os  $H_R$ 's para a variável  $v$ . Esse resultado difere do encontrado para as campanhas de Tijucas do Sul, Missal e AHATS.

Posteriormente analisamos o expoente de Hurst das séries completas (7h 30min) somente utilizando o MFA. Conforme mostrado no Capítulo 5, na Subseção 5.3.2, as séries de  $u$  e de  $v$  possuem dois decaimentos para diferentes  $\Delta$ 's, o que não acontece para a série de  $w$ , que apresenta somente um decaimento. Para estimar o expoente de Hurst destas duas séries, utilizaremos os intervalos de ajuste previamente descritos na Subseção 5.3.2. A Figura 6.32 mostra os valores encontrados para  $H_p$  para  $u$  (a),  $v$  (b) e  $w$  (c).

Analisando os gráficos da Figura 6.32 vemos que independentemente do intervalo escolhido as séries  $u$  e  $v$  exibem o fenômeno de Hurst ( $u - H_{p1} = 0,8225$  e  $H_{p2} = 0,7413$ ;  $v -$

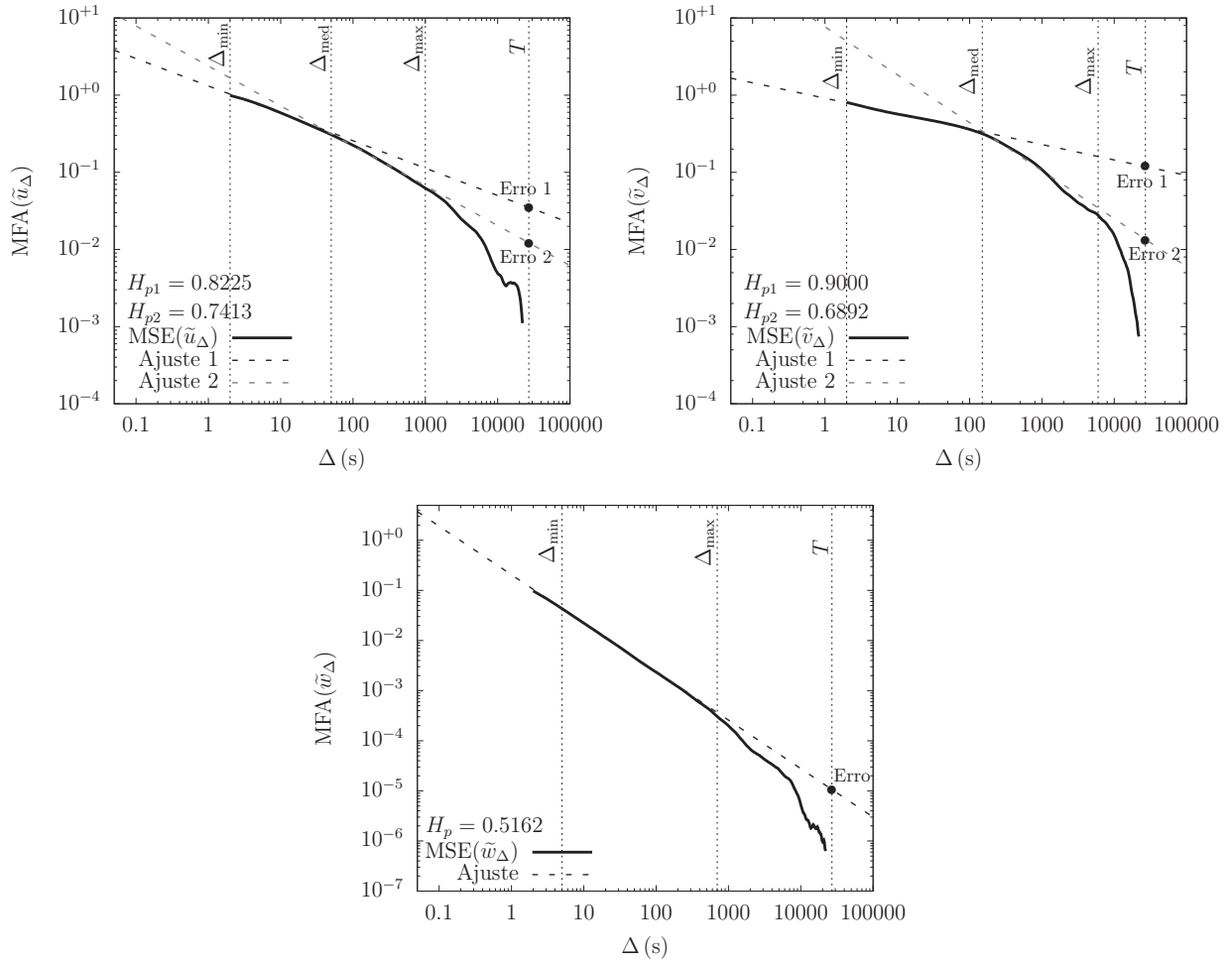


Figura 6.32: Estimativa do expoente de Hurst  $H_p$  e do erro aleatório para as séries completas de  $u$ ,  $v$  e  $w$  medidas em Mahomet.

$H_{p1} = 0,9000$  e  $H_{p2} = 0,6892$ ). Já para a série de  $w$ , o valor de  $H_p$  é muito próximo de  $1/2$  ( $w - H_p = 0,5162$ ) e sugere que a série não possui memória de longo prazo. Também é possível verificar que a estimativa do erro de  $u$  e de  $v$  depende da escolha do intervalo de ajuste.

Para tentarmos verificar qual é o intervalo de ajuste correto para as variáveis  $u$  e  $v$ , e também analisar o comportamento de  $w$ , plotamos em um único gráfico as seguintes análises:

1. O comportamento do MSE para a série completa (linha vermelha), juntamente com os ajustes;
2. O comportamento do MSE para as 15 séries de 30 minutos (linhas pretas);
3. Os erros referentes a cada série de 30 minutos (pontos azuis). Utilizou-se a estimativa MFA e o ajuste a lei de potência foi realizado com os intervalos previamente definidos na Subseção 5.3.2;
4. O erro da série completa calculada a partir dos 15 blocos de 30 minutos (ponto verde) segundo a seguinte expressão:

$$\text{MSE}(\tilde{u}_B) = \frac{1}{\text{NB}} \sum_{i=1}^{\text{NB}} (\bar{u}_B(i) - \bar{u})^2 \quad (6.5)$$

onde  $B$  é o tamanho do bloco (30 minutos),  $\text{NB}$  é o número de blocos (15 blocos),  $\bar{u}_B$  é a média de cada bloco de 30 minutos e  $\bar{u}$  é a média da série completa.

Os resultados podem ser vistos na Figura 6.33 para:  $u$  (a),  $v$  (b) e  $w$  (c). Analisando os gráficos da Figura 6.33 verificamos que o erro da série completa de  $u$ , calculada a partir dos 15 blocos de 30 minutos, fica entre os erros referentes a cada bloco de 30 minutos e muito próximo da reta referente ao Ajuste 2. Vemos que o mesmo comportamento acontece para  $v$ . Esse resultado sugere que o segundo decaimento deve ser utilizado para a estimativa do expoente de Hurst e do erro aleatório para  $u$  e  $v$ . Já para a série de  $w$ , temos que os erros referentes a cada bloco de 30 minutos ficam em torno da reta ajustada aos dados da série completa, no entanto o erro calculado a partir dos 15 blocos de 30 minutos fica um pouco abaixo desta reta, porém fica próximo da estimativa de RMSE da série completa.

Analisando a direção do vento da série completa e as direções do vento das séries de 30 minutos, como pode ser visto na Figura 6.34, tem-se que os resultados mostrados nesta seção, referentes à comparação do comportamento do MSE e das estimativas de erros, são válidos visto que a direção do vento das 15 séries de 30 minutos varia muito pouco se comparado com a série completa.

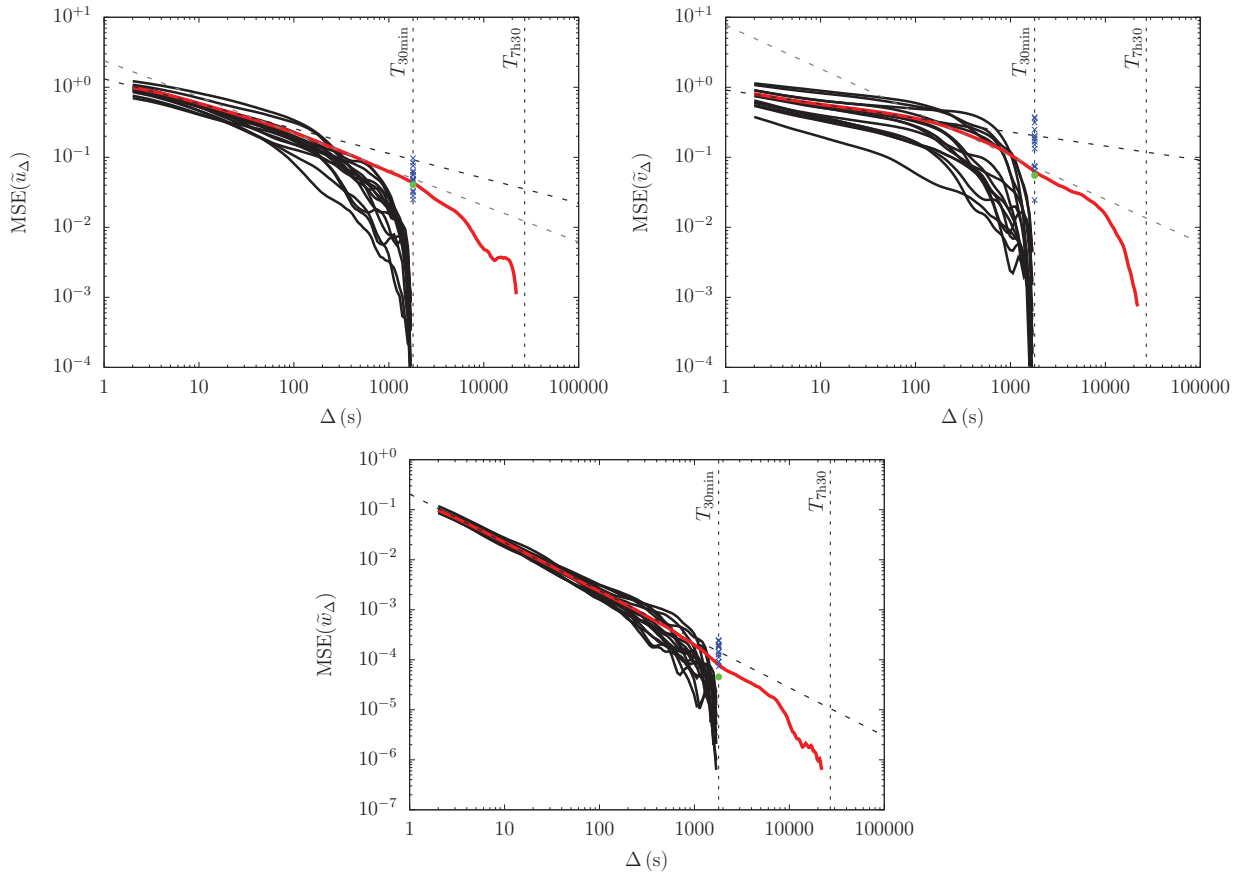


Figura 6.33: Análise dos decaimentos do MSE e dos erros estimados pelo MSE para as séries  $u$ ,  $v$  e  $w$  medidas em Mahomet. A linha vermelha corresponde ao comportamento do MSE da série completa, juntamente com os ajustes – linhas tracejadas. As linhas pretas representam o comportamento do MSE para as 15 séries de 30 minutos. Os pontos azuis são os erros referentes a cada uma das 15 séries de 30 minutos. E o ponto verde refere-se ao erro da série completa com base nas 15 séries de 30 minutos calculado a partir da equação (6.5).

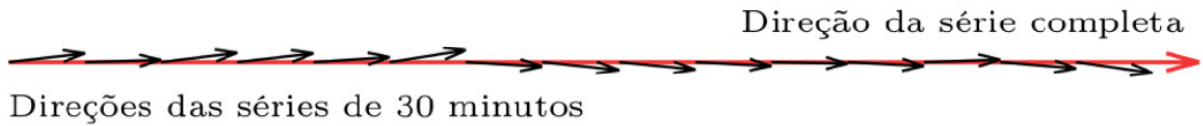


Figura 6.34: Direção da velocidade do vento da série completa (vermelho) e direções da velocidade do vento das séries de 30 minutos (preto).

### 6.6.2 Análise do estimador R/S

Nesta seção apresentaremos uma breve análise do comportamento do estimador R/S utilizando diferentes tamanhos de séries geradas a partir da série de 7h 30min de Mahomet. Dividimos a série completa em: 90 séries de 5 minutos, 45 séries de 10 minutos, 30 séries de 15 minutos, 15 séries de 30 minutos, 10 séries de 45 minutos e 7 séries de 60 minutos. Primeiramente plotamos para todas as séries o comportamento de R/S *versus*  $\Delta$  e R/S *versus*  $\Delta/T$  para  $u$ ,  $v$  e  $w$ , onde  $T$  é o tamanho de cada série. O resultado encontrado pode ser visto na Figura 6.35. Nota-se que o comportamento de R/S converge para todas as séries quando é plotado contra  $\Delta$  e não colapsa quando é plotado contra  $\Delta/T$ , uma escala adimensional.

A fim de tentar adimensionalizar R/S, dividimos R/S por  $(\delta_{\min} + \delta_{\max})/2$ , onde  $\delta_{\min}$  e  $\delta_{\max}$  são os  $\delta$ 's referentes às análises de máximo e mínimo do intervalo  $R^*(t)$ , equação (2.22). Plotamos o R/S normalizado pelos  $\delta$ 's contra  $\Delta$  e  $\Delta/T$ . O resultado encontrado pode ser visto na Figura 6.36. Novamente o comportamento de R/S colapsa quando é plotado contra  $\Delta$  e não colapsa quando é plotado contra  $\Delta/T$ . Assim verificamos que esta metodologia não foi correta para normalizar o R/S.

Os resultados encontrados durante essa breve análise mostram que são necessários estudos adicionais para entender melhor o comportamento do R/S e determinar qual é a variável correta que o adimensionaliza. Recomenda-se que seja analisado o trabalho de Feller (1951), pois ele analisa o comportamento assintótico do R/S para variáveis aleatórias independentes, o que pode ajudar no entendimento do comportamento do R/S.

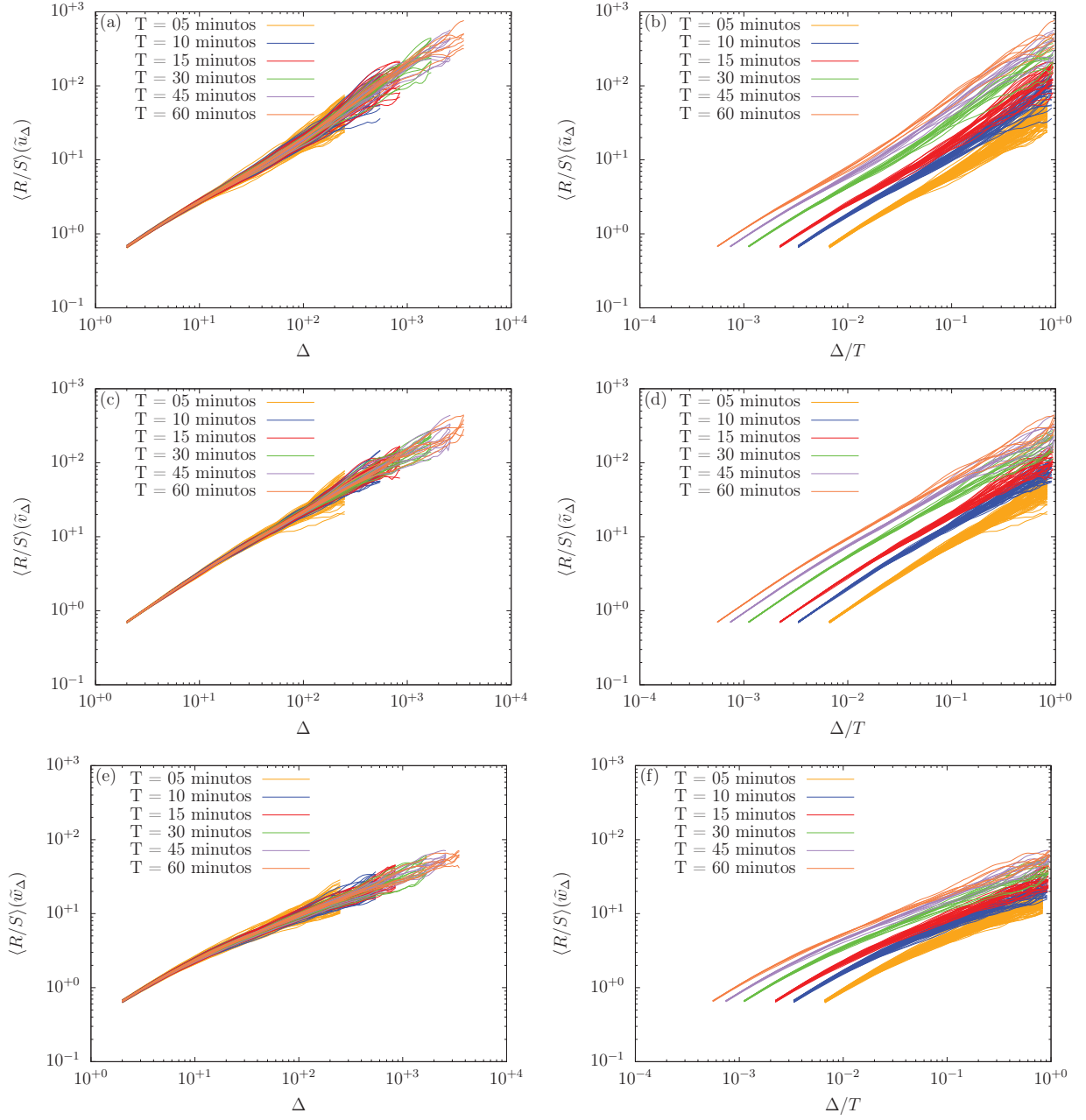


Figura 6.35: Comportamento de  $R/S$  versus  $\Delta$  e  $R/S$  versus  $\Delta/T$ .

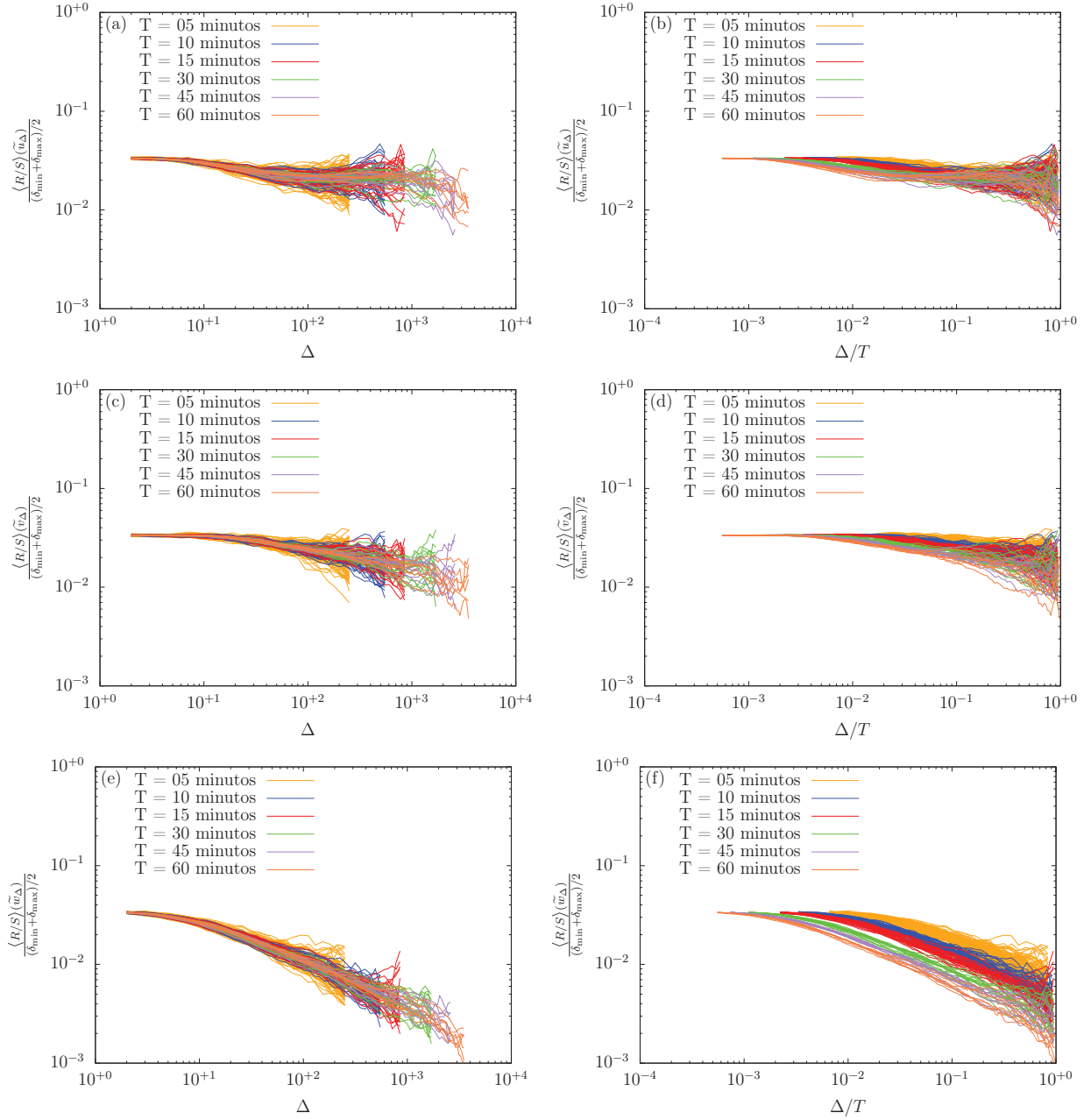


Figura 6.36: Comportamento de  $(R/S)/((\delta_{\min} + \delta_{\max})/2)$  versus  $\Delta$  e  $(R/S)/((\delta_{\min} + \delta_{\max})/2)$  versus  $\Delta/T$ .

## 7 Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma nova abordagem para estimativa de erros aleatórios que leva em consideração o fenômeno de Hurst. A estimativa MFA é uma adaptação da equação para o MSE proposta por Lumley e Panofsky (1964) e do Método de Filtragem proposto por Salesky et al. (2012). Essa abordagem para a estimativa de erros, a qual deixa a lei de potência  $p$  do MSE variar livremente para cada ajuste, também permite estimar o expoente de Hurst ( $H_p$ ). Outras metodologias utilizadas para a estimativa do expoente de Hurst são: a partir da lei de potência da função de autocorrelação ( $H_A$ ) e da função de estrutura ( $H_D$ ), a partir da transformada de *wavelet* ( $H_W$ ), o método *zero-crossing* ( $H_Z$ ), e o método clássico R/S ( $H_R$ ).

Primeiramente foram comparadas as estimativas do expoente de Hurst, utilizando os seis métodos citados acima, de séries sintéticas (smfGn) e de séries de dados de turbulência atmosférica. Para as séries sintéticas, as estatísticas das estimativas dos expoentes de Hurst mostraram que  $H_A$ ,  $H_D$  e  $H_R$  são mais variáveis se comparado com as outras estimativas. Também foi verificado que os estimadores  $H_D$  e  $H_R$  podem ser enviesados, pois apresentam valores médios com mais de um desvio-padrão do valor real. Por fim, analisando as estimativas em termos de variabilidade e da distância do valor real,  $H_W$ ,  $H_Z$  e  $H_p$  têm os melhores desempenhos.

Analisando estes mesmos estimadores para 130 blocos contendo 30 minutos de dados de velocidade do vento  $u'$  da campanha AHATS, foi verificado que somente as estimativas  $H_p$ ,  $H_R$  e  $H_Z$  puderam ser analisadas. Isto acontece porque as séries turbulentas apresentam mais de uma lei de potência nas funções de autocorrelação, de estrutura e no espectro de *wavelet*. Graficamente as leis de potência identificadas são referentes à faixa inercial, e não correspondem as largas escalas, foco de estudo neste trabalho. As estatísticas das estimativas do expoente de Hurst mostram que existe uma maior variabilidade nos resultados. Isto já era esperado visto que esses dados apresentam diferentes condições de estabilidade e intensidade de turbulência. Também foi verificado que as estimativas de  $H_Z$  para as séries turbulentas não foram adequadas, pois o valor médio foi de 0,991, valor bem distante das outras duas estimativas. A estimativa  $H_R$  apresenta valores maiores que a estimativa  $H_p$ .

Na literatura encontra-se que uma das possíveis causas do fenômeno de Hurst é a não-



estacionariedade das séries. A fim de verificar qual a relação entre a não-estacionariedade e o expoente de Hurst, foi aplicado o método da remoção da tendência linear com o objetivo de reduzir os efeitos de não-estacionariedade das séries. O expoente de Hurst foi estimado para os dados de primeira ordem antes (dados brutos) e após este procedimento (flutuações turbulentas), a fim de verificar o efeito da remoção da tendência linear nas estimativas de  $H$ . Os resultados mostram que a mudança nos valores do expoente de Hurst é mínima e nunca faz com que  $H$  chegue no valor  $1/2$ . Verificamos também que o MSE é mais sensível a remoção das tendências do que o R/S. Desta forma, podemos concluir que a remoção da tendência linear afeta muito pouco os valores de  $H$ , não sendo capaz de eliminar o fenômeno de Hurst. Para outras ordens ainda são necessários estudos.

Os resultados referentes às estimativas do expoente de Hurst mostram que, independente do estimador utilizado (MFA ou R/S), a maioria dos casos das variáveis analisadas neste trabalho (flutuações de primeira, segunda e terceira ordem) apresentam  $H > 1/2$ . Este valor para  $H$  mostra que as séries exibem o fenômeno de Hurst. Este fenômeno é mais intenso, no sentido de maiores valores de  $H$ , para as flutuações de primeira ordem, com exceção de  $w'$ . É importante notar que para estes valores de  $H$  a função de autocorrelação não converge e consequentemente a escala integral é infinita, ou seja, não existe.

Nas análises realizadas neste trabalho com dados de turbulência e com séries sintéticas de smfGn foi verificado que as estimativas de  $H$  são diferentes usando os dois estimadores: MFA e R/S. Este mesmo comportamento já tinha sido verificado nos campos de hidrologia, hidroclimatologia, finança, e em sequências de ruído Gaussiano fracionário e ARIMA fracionário. Os resultados encontrados neste trabalho também mostram que para dados de turbulência atmosférica, com exceção de  $v$  das séries de Mahomet, as estimativas de R/S são, na maioria dos casos, maiores que as estimativas de MFA. Nós conjecturamos que o estimador R/S é enviesado. No entanto, deixa-se como recomendação para futuros trabalhos maiores estudos para verificar se esse estimador é realmente enviesado.

Para o erro aleatório, os resultados mostram que na maioria dos casos as estimativas de erro do método LP são maiores que as estimativas de MF. Já as estimativas de erro do método MFA são maiores que as estimativas de erros utilizando os métodos MF e LP. Matematicamente isto faz sentido, uma vez que, para os casos que exibem o fenômeno de Hurst, a função MSE cai com um expoente mais lento que  $-1$ , expoente previsto quando o processo estocástico tem escala integral finita. Estes resultados mostram que os métodos para estimar erros aleatórios que levam em consideração a existência da escala integral podem estar subestimando os erros.

Em relação à estimativa de erros de terceira ordem, tem-se que os erros relativos à média são muito maiores se comparados com os erros relativos dos momentos de primeira e segunda ordem. Este resultado mostra o quão difícil é a estimativa de erros de momentos de terceira

ordem relativos à média.

Também foi analisado se as estimativas do expoente de Hurst ( $H_p$  e  $H_R$ ) e os erros aleatórios provenientes das estimativas MFA e MF possuem alguma dependência com a variável de estabilidade  $\zeta$ . Gráficamente não é possível identificar nenhuma relação entre  $\zeta$  e os  $H$ 's. Em relação aos erros aleatórios, verificamos que, independente do método utilizado, o erro relativo de  $w'u'$  depende de  $\zeta$  em condições instáveis e o erro relativo de  $w'\theta'$  cresce com  $\zeta$  em condições estáveis. Para os outros casos, estimativas de erros dos momentos de primeira e terceira ordem e do restante dos momentos de segunda ordem, não foi possível identificar nenhuma tendência com relação a  $\zeta$ .

Para os dados de Mohamet, têm-se que o MSE da série completa de  $u$  e de  $v$  apresentam dois decaimentos distintos. Os expoentes de Hurst referentes a estes decaimentos apresentam valores maiores que  $1/2$ , sugerindo que as séries exibem o fenômeno de Hurst. Já o MSE da série completa de  $w$  apresenta  $H \approx 1/2$ . Para este valor temos que a série não exibe o fenômeno de Hurst. Conforme já mostrado anteriormente, [Mesa e Poveda \(1993\)](#) e [Bras e Rodríguez-Iturbe \(1993\)](#) comentam que uma das causas do fenômeno de Hurst é que ele é um comportamento transiente, e desta forma o tamanho das séries de dados não é suficientemente grande para que se possa observar o comportamento de longo prazo. Neste exemplo é possível ver que mesmo analisando uma série relativamente longa ainda encontramos valores de  $H > 1/2$ . Por fim, as análises com blocos de 30 minutos mostram que o segundo decaimento de  $u$  e de  $v$  são os mais adequados para a estimativa do expoente de Hurst e do erro aleatório.

Por fim, utilizando diferentes tamanhos de séries geradas a partir da série completa de Mahomet foi analisado o comportamento do estimador R/S. No entanto mais estudos são necessários para se definir a variável correta para tornar o estimador adimensional. Conforme já comentado, recomenda-se análise do trabalho de [Feller \(1951\)](#), o qual analisa o comportamento assintótico do intervalo ajustado.

Os resultados encontrados neste trabalho são de grande importância visto que as estimativas de erros são utilizadas para determinar o tempo de média ([Wyngaard, 1973](#)), determinar qual o tamanho das séries para a estimativa de momentos de até quarta ordem com um grau de significância ([Lenschow et al., 1994](#)) e para analisar a validade da TSMO ([Salesky e Chamecki, 2012](#)). Tem-se também que os momentos de segunda ordem são utilizados, por exemplo, no Método das Covariâncias Turbulentas para a estimativa de fluxos turbulentos ([Rannik et al., 2004](#); [Hammerle et al., 2007](#); [Carneiro, 2008](#); [Armani et al., 2013](#)). Além disso, muitas vezes as estimativas dos erros dos momentos de segunda ordem são calculados com métodos clássicos, os quais, segundo este trabalho, subestimam os erros. Já os momentos de terceira ordem compõem nas equações promediadas de Reynolds para a evolução dos momentos de segunda ordem, e os erros envolvidos em seu cálculo raramente são avaliados.

## REFERÊNCIAS

- Armani, F. A. S., da Costa Dias, N. L., Crivellaro, B. L., e Chor, T. L. G. (2013). Fluxos turbulentos de dióxido de carbono sobre o reservatório da usina hidrelétrica de Itaipu-PR. *Ciência e Natura*, páginas 147–151.
- Arneodo, A., Bacry, E., e Muzy, J. (1995). The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 213(1-2):232–275.
- Aubinet, M., Vesala, T., e Papale, D., editores (2012). *Eddy covariance. A practical guide to measurement and data analysis*. Springer.
- Bendat, J. S. e Piersol, A. G. (2010). *Random Data*. Wiley, New York, 4<sup>nda</sup> edição.
- Beran, J. (1989). A test of location for data with slowly decaying serial correlatoins. *Biometrika*, 76(2):261–269.
- Beran, J. (1994). *Statistics for long-memory processes*. Chapman & Hall, New York.
- Bernardes, M. e Dias, N. L. (2010). The alignment of the mean wind and stress vectors in the unstable surface layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 134:41–59.
- Bisaglia, L. e Guégan, D. (1998). A comparision of techniques of estimation in long-memory processes. *Computational Statistics and Data Analysis*, 27:61–81.
- Boes, D. C. e Salas, J. D. (1978). Nonstationatiry of the mean and the Hurst phenomenon. *Water Resources Research*, 14(1):135–143.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., e c. Reinsel, G. (1994). *Time Series Analysis Forecasting and Control*. Prentice-Hall.
- Bras, R. L. e Rodríguez-Iturbe, I. (1993). *Random Functions and Hydrology*. Dover Publications, New York.
- Burlando, P., Montanari, A., e Rosso, R. (1996). Modelling hidrological data with and without long memory. *Meccanica*, 31:87–101.
- Caccia, D. C., Percival, D., Cannon, M. J., Raymond, G., e Bassinghtwaighte, J. B. (1997). Analyzing exact fractal time series: evaluating dispersional analysis and rescaled range methods. *Physica A*, 246(3–4):609–632.
- Cancelli, D. M., Chamecki, M., e Dias, N. L. (2014). A large-eddy simulation study of scalar dissimilarity in the convective atmospheric boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 71(1):3–15.

- Carbone, A., Castelli, G., e Stanley, H. (2004). Time-dependent Hurst exponent in financial time series. *Physica A*, 344:267–271.
- Carneiro, J. V. (2008). Fluxos turbulentos de  $\text{CO}_2$  em uma área de arroz irrigado no RS. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria.
- Chamecki, M. (2013). Persistence of velocity fluctuations in non-Gaussian turbulence within and above plant canopies. *Physics of Fluids*, 25:115110.
- Chamoli, A., Bansal, A. R., e Dimri, V. (2007). Wavelet and rescaled range approach for the Hurst coefficient for short and long time series. *Computers & Geosciences*, 33(1):83–93.
- Chatfield, C. (2009). *The analysis of time series: an introduction*. Chapman and Hall/CRC, Florida, 6ª edição.
- Chorin, A. J. e Hald, O. H. (2009). *Stochastic tools in mathematics and science*, volume 3. Springer.
- Coeurjolly, J. F. (2000). Simulation and identification of the fractional Brownian motion: a bibliographical and comparative study. *J. Stat. Software*, 5:7.
- Crivellaro, B. L. (2011). Fluxo de  $\text{CO}_2$  sobre *Axonopus Compressus*: comparação entre os métodos de covariância turbulenta padrão e passa banda. Trabalho de conclusão do curso de engenharia ambiental, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- Crivellaro, B. L. (2014). O fenômeno de Hurst em turbulência atmosférica: uma aplicação à estimativa de erros. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental (PPGEA/UFPR).
- Crivellaro, B. L., Dias, N. L., e Chor, T. (2013). Aplicação do método de Salesky et al. (2012) usando um filtro temporal para estimar o erro de calor sensível em Tijucas do Sul – PR e em Missal – PR. *Ciência e Natura*, Edição especial:67–71.
- Daubechies, I. (1990). The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE transactions on information theory*, 36(5):961–1005.
- Daubechies, I. (1992). *Ten lectures on wavelets*, volume 61. Siam.
- Dias, N. L., Chamecki, M., Kan, A., e Okawa, C. M. P. (2004). A study of spectra, structure and correlation functions and their implication on the stationarity of surface-layer turbulence. *Boundary-Layer Meteorology*, 110:165–189.
- Dias, N. L., Crivellaro, B. L., Armani, F. S., Chor, T. L., Gobbi, M. F., e Santos, A. L. (2013). Abstract B32A-03. Short-term eddy-covariance measurements of  $\text{CO}_2$  fluxes at Itaipu Lake, Brazil. Em *Meeting of the Americas, Cancún, 2013*.
- Dias, N. L., Crivellaro, B. L., e Chamecki, M. (2018). The Hurst phenomenon in error estimates related to atmospheric turbulence. *Boundary-Layer Meteorology*, 168:387–416.
- Embrechts, P. e Maejima, M. (2000). An introduction to the theory of selfsimilar stochastic processes. *International Journal of Modern Physics*, 14:1399–1420.

- Embrechts, P. e Maejima, M. (2002). *Selfsimilar processes*. Princeton University Press Oxford, Princeton.
- Farge, M. (1992). Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Annual review of fluid mechanics*, 24(1):395–458.
- Feller, W. (1951). The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, páginas 427–432.
- Finkelstein, P. L. e Sims, P. F. (2001). Sampling error in eddy correlation flux measurements. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 106(D4):3503–3509.
- Garcia, C. M., Jackson, P. R., e Garcia, M. H. (2006). Confidence intervals in the determination of turbulence parameters. *Experiments in Fluids*, 40:514–522.
- Gilmore, M., Yu, C., Rhodes, T., e Peebles, W. (2002). Investigation of rescaled range analysis, the Hurst exponent, and long-time correlations in plasma turbulence. *Physics of Plasmas*, 9(4):1312–1317.
- Gluhovsky, A. e Agee, E. (1994). A definitive approach to turbulence statistical studies in planetary boundary layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 51(12):1682–1690.
- Granero, M. S., Segovia, J. T., e Pérez, J. G. (2008). Some comments on Hurst exponent and the long memory processes on capital markets. *Physica A*, 387:5543–5551.
- Hamed, K. H. (2007). Improved finite-sample Hurst exponent estimates using rescaled range analysis. *Water Resources Research*, 43:1–9.
- Hammerle, A., Haslwanter, A., Schmitt, M., Bahn, M., Tappeiner, U., Cernusca, A., e Wohlfahrt, G. (2007). Eddy covariance measurements of carbon dioxide, latent and sensible energy fluxes above a meadow on a mountain slope. *Boundary-layer meteorology*, 122(2):397–416.
- Hansen, E. (1971). Measurements of Lagrangian characteristics for surface turbulence. *Basic Res. Progr. Rep. 23, Hydraul. Lab, Tech. Univ. of Denmark, Copenhagen*, páginas 21–26.
- Helland, K. N. e Van Atta, C. W. (1978). The 'Hurst phenomenon' in grid turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 85(3):573–589.
- Hu, K., Ivanov, P. C., Chen, Z., Carpena, P., e Stanley, H. E. (2001). Effect of trends on detrended fluctuation analysis. *Physical Review E*, 64(1):011114.
- Hurst, H. E. (1951). Long term storage capacities of reservoirs. *American Society of Civil Engineers*, 116:770–799.
- Hurst, H. E. (1956). Methods od using long term storage in reservoirs. *Institution of Civil Engineers*, 5(5):519–543.
- Hurst, H. E., Black, R. P., e Simaika, V. M. (1965). *Long term in reservoirs: an experimental study*. Constable, London.

- Jones, C. L., Lonergan, G. T., e Mainwaring, D. (1996). Wavelet packet computation of the Hurst exponent. *Journal of Physics A: Mathematical and general*, 29(10):2509.
- Kaimal, J. C. e Finnigan, J. J. (1994). *Atmospheric boundary layer flows: their structure and measurement*. Oxford University Press, New York.
- Kaiser, G. (2010). *A friendly guide to wavelets*. Springer Science & Business Media.
- Katul, G., Vidakovic, B., e Albertson, J. (2001). Estimating global and local scaling exponents in turbulent flows using discrete wavelet transformations. *Physics of Fluids*, 13(1):241–250.
- Katul, G. G. e Parlange, M. B. (1995). Analysis of land surface heat fluxes using the orthonormal wavelet approach. *Water Resources Research*, 31(11):2743–2749.
- Klemes, V. (1974). The Hurst phenomenon: a puzzle? *Water Resources Research*, 10(4):675–688.
- Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers (in Russian). *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 30(299–303).
- Koutsoyiannis, D. (2002). The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy. *Hydrological Sciences Journal*, 47(4):573–595.
- Kristoufek, L. (2010). On spurious anti-persistence in the US stock indices. *Chaos, Solitons & Fractals*, páginas 68–78.
- Laushey, L. M. (1951). Discussion of 'Long-term storage capacity of reservoirs' by H. E. Hurst. *American Society of Civil Engineers*, 116:803–804.
- Lee, X., Massman, W., e Law, B. (2005). *Handbook of Micrometeorology: A guide for surface flux measurement and analysis*. Springer.
- Lenschow, D. H., Mann, J., e Kristensen, L. (1994). How long is long enough when measuring fluxes an other turbulence statistics? *American Meteorological Society*, 11:661–673.
- Lenschow, D. H. e Stankov, B. B. (1986). Length scales in the convective boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 43(12):1198–1209.
- Liepmann, H. (1952). Aspects of the turbulence problem. *Z. Angew. Math. Phys.*, 3(5):321–342.
- Lumley, J. L. e Panofsky, H. A. (1964). *The structure of atmospheric turbulence*. Interscience, New York.
- Mandelbrot, B. (1965). Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi; Application à la loi climatologique de H. E. Hurst. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 260(1):3274–3277.
- Mandelbrot, B. B. (1971). A fast fractional Gaussian noise generator. *Water Resources Research*, 7(3):543–553.



- Mandelbrot, B. B. e van Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*, 10(4):422–437.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1968). Noah, Joseph, and Operational Hydrology. *Water Resources Research*, 4(5):909–918.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969a). Computer experiments with fractional Gaussian noises: Part 1, averages and variances. *Water resources research*, 5(1):228–241.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969b). Computer experiments with fractional Gaussian noises: Part 2, rescaled ranges and spectra. *Water resources research*, 5(1):242–259.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969c). Robustness of the Rescaled Range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research*, 5(5):967–988.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969d). Some long-run properties of geophysical records. *Water Resources Research*, 5(2):321–340.
- Mansukhani, S. (2012). Predictability of Time Series. *Analytics Magazine*, páginas 29–31.
- Mesa, O. J. e Poveda, G. (1993). The Hurst effect: the scale of fluctuation approach. *Water Resources Research*, 20(12):3995–4002.
- Moncrieff, J. B., Malhi, Y., e Leuning, R. (1996). The propagation of errors in long-term measurements of land-atmosphere fluxes of carbon and water. *Global Change Biology*, 2:231–240.
- Monin, A. S. e Yaglom, A. M. (1971). *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence*, volume 1. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Montanari, A., Rosso, R., e Taqqu, M. S. (1997). Fractionally differenced ARIMA models applied to hydrologic time series identification, estimation and simulation. *Water Resources Research*, 33(5):1035–1044.
- Montgomery, D. C. e Runger, G. C. (2011). *Applied statistics and probability for engineers*. John Wiley & Sons, 3rd<sup>a</sup> edição.
- Moore, G. E., Liu, M.-K., e Shi, L.-H. (1985). Estimates of integral time scales from a 100-m meteorological tower at a plains site. *Boundary Layer Meteorology*, 31:349–368.
- Nordin, C. F., Mcquivey, R. S., e Meija, J. M. (1972). Hurst Phenomenon in Turbulence. *Water Resources Research*, 8(6):1480–1486.
- Oswiecimka, P., Kwapien, J., e Drozd, S. (2006). Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures. *Physical Review E*, 74(1):016103.
- Peng, C.-K., Buldyrev, S. V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H. E., e Goldberger, A. L. (1994). Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical review e*, 49(2):1685.
- Potter, K. W. (1976). Evidence for nonstationarity as a physical explanation of the Hurst phenomenon. *Water Resources Research*, 12(5):1047–1052.

- Rannik, Ü., Keronen, P., Hari, P., e Vesala, T. (2004). Estimation of forest-atmosphere CO<sub>2</sub> exchange by eddy covariance and profile techniques. *Agricultural and Forest Meteorology*, 126(1-2):141–155.
- Rezakhah, S., Philippe, A., e Modaresi, N. (2010). Estimation of Scale and Hurst Parameters of Semi-Selfsimilar Processes. MSC Classes.
- Salesky, S. T. e Chamecki, M. (2012). Random Errors in Turbulence Measurements in the Atmospheric Surface Layer: Implications for Monin-Obukhov Similarity Theory. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 69:3700–3714.
- Salesky, S. T., Chamecki, M., e Dias, N. L. (2012). Estimating the random error in eddy-covariance based fluxes and other turbulence statistics: the filtering method. *Boundary-Layer Meteorology*, 144:113–135.
- Shi, B., Vidakovic, B., Katul, G. G., e Albertson, J. D. (2005). Assessing the effects of atmospheric stability on the fine structure of surface layer turbulence using local and global multiscale approaches. *Physics of Fluids*, 17(5):055104.
- Simonsen, I. (2003). Measuring anti-correlations in the Nordic electricity spot market by wavelets. *Physica A: Statistical Mechanics and its applications*, 322:597–606.
- Simonsen, I., Hansen, A., e Nes, O. M. (1998). Determination of the Hurst exponent by use of wavelet transforms. *Physical Review E*, 58(3):2779–2787.
- Sreenivasan, K., Chambers, A., e Antonia, R. (1978). Accuracy of moments of velocity and scalar fluctuations in the atmospheric surface layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 14(3):341–359.
- Sullivan, P. P., Horst, T. W., Lenschow, D. H., Moeng, C.-H., e Weil, J. C. (2003). Structure of subfilter-scale fluxes in the atmospheric surface layer with application to large-eddy simulation modelling. *Journal of Fluid Mechanics*, 482:101–139.
- Sutton, O. G. (1932). A Theory of Eddy Diffusion in the Atmosphere. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 135:143–165.
- Taqqu, M. S. (2004). An Essay and Review of the Book: Selfsimilar Processes. Paul Embrechts and Makoto Maejima, Princeton University Press, 2003. *Journal of Statistical Physics*, 114:1171–1177.
- Taqqu, M. S., Teverovsky, V., e Willinger, W. (1995). Estimators for long-range dependence: an empirical study. *Fractals*, 3(4):785–798.
- Taylor, G. I. (1935). Statistical theory of turbulence. I. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:421–444.
- Todorovic, P. (2012). *An introduction to stochastic processes and their applications*. Springer Science & Business Media.
- Torrence, C. e Compo, G. P. (1998). A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological society*, 79(1):61–78.



- UCAR/NCAR–Earth Observing Laboratory (1990). NCAR Integrated Surface Flux System (ISFS). NCAR/Earth Observing Laboratory, doi:10.5065/D6ZC80XJ.
- Vergassola, M., Benzi, R., Biferale, L., e Pisarenko, D. (1993). Wavelet analysis of a Gaussian Kolmogorov signal. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26(22):6093.
- Vogel, R. M., Tsai, Y., e Limbrunner, J. F. (1998). The regional persistence and variability of annual streamflow in the United States. *Water Resources Research*, 34:3445–3459.
- Wei, W. W. S. (2006). *Time series analysis: univariate and multivariate methods*. Pearson, Estados Unidos, 2ª edição.
- Wyngaard, J. C. (1973). On surface-layer turbulence. Em Haugen, D. A., editor, *Workshop on micrometeorology*, páginas 101–149. American Meteorological Society, Boston.
- Yaglom, A. M. (1987). *Correlation theory of stationary and related random functions I: Basic results*. Springer-Verlag, New York. 526 pp.
- Yu, C., Gilmore, M., Peebles, W., e Rhodes, T. (2003). Structure function analysis of long-range correlations in plasma turbulence. *Physics of plasmas*, 10(7):2772–2779.
- Zahn, E., Chor, T. L., e Dias, N. L. (2016). A simple methodology for quality control of micro-meteorological datasets. *American Journal of Environmental Engineering*, 6(4A):135–142.